MA 2002 - Calculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Hector Ramirez
Auxs: German Ibarra - Victor Riquelme
Fecha: 06 de Octubre de 2009

P1 a, b constante. Queremos calcular

(a)
$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2\cos^2\theta + b^2 \operatorname{sen}^2\theta}$$

Consideramos la funcion $f(z) = \frac{1}{z}$

Tomamos $\int_\Gamma \frac{1}{z}\,dz$, con Γ una elipse parametrizada por $\gamma(\theta) = a\cos\theta + i b \operatorname{sen}\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$

Segun esto, la

$$\gamma'(\theta) = -a\operatorname{sen}\theta + i b \cos\theta \, d\theta$$
$$\theta \in [0, 2\pi]$$

luego
$$\int_0^{2\pi} \frac{-a\operatorname{sen}\theta + i b\cos\theta \, d\theta}{a\cos\theta + i b \operatorname{sen}\theta} \cdot \frac{a\cos\theta - i b\operatorname{sen}\theta}{(a\cos\theta - i b\operatorname{sen}\theta)}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{-a^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + i ab\cos^2\theta + i ab\operatorname{sen}^2\theta + b^2 \operatorname{sen}\cos}{a^2\cos^2\theta + b^2\operatorname{sen}^2\theta}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{(b^2-a^2)\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{a^2\cos^2\theta + b^2\operatorname{sen}^2\theta} + i\int_0^{2\pi} \frac{ab}{a^2\cos^2\theta + b^2\operatorname{sen}^2\theta}$$

$$\operatorname{Res}(f, p) = \lim_{z\to p} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-p)^m f(z) \right]$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z},0\right) = \lim_{z\to 0} \frac{z}{z} = 1$$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma} f(z) = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z},0\right)$$

$$= 2\pi i$$

$\Rightarrow$ Igualando parte real e imaginaria

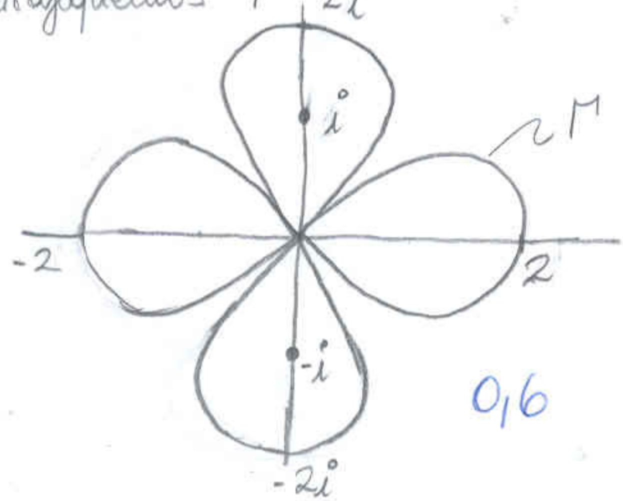
$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2\cos^2\theta + b^2\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{2\pi}{ab}.$$

b) Evalue la integral $\oint_{\Gamma} \frac{1}{(1+z^2)^2}$ donde Γ parametrizada por

$$\gamma(t) = 2|\cos 2t| e^{it}$$

Sol

Grafiquemos Γ



0,6

Sea

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}$$

luego los polos son i y $-i$, ambos de orden 2 0,6

se tiene que $\operatorname{Res}(f,p) = \lim_{z\to p} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-p)^m f(z)]$

con m orden del polo

luego

$$\operatorname{Res}(f,i) = \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{(z+i)^2}\right) = \lim_{z\to i} \frac{-2}{(z+i)^3} = \frac{-2}{(2i)^3}$$

$$= \frac{-2}{-8i} = \frac{-i}{4}.$$ 0,6

$$\operatorname{Res}(f,-i) = \lim_{z\to -i} \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{(z-i)^2}\right) = \lim_{z\to -i} \frac{-2}{(z-i)^3} = \frac{-2}{(-2i)^3}$$

$$= \frac{-2}{8i} = \frac{i}{4}$$ 0,6

luego, por el theo. de los Residuos

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\substack{p \text{ polo} \\ \text{encerrado}}} \operatorname{Res}(f,p) = 2\pi i \left(\frac{i}{4} - \frac{i}{4}\right) = 0.$$ //

0,6

b) Serie de potencias en torno a 0 de la función $f(z) = \dfrac{z^2}{(1+z)^2}$ indicando radio de convergencia

Sol.

Calculemos primero la serie de potencias de

$f(z) = \dfrac{z}{1+z}$ Notemos que $f(z) = z \cdot \dfrac{1}{\underbrace{1-(-z)}_{\sum_{k=0}^{\infty}(-z)^k \text{ (si } |z|<1)}}$ 0,5

luego $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{k+1}(-1)^k$ 0,5

Veamos que $f'(z) = \dfrac{1\cdot(1+z) - z\cdot 1}{(1+z)^2} = \dfrac{1}{1+z^2}$. 0,5

$$\Rightarrow \frac{1}{1+z^2} = f'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) z^k (-1)^k \quad 0{,}5$$

luego $\boxed{\dfrac{z^2}{1+z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+1) z^{k+2}}$ 0,5

Por las condiciones impuestas $R = 1$ 0,5.

Además

$$\frac{z^2}{(1+z)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+2} z^{k+2} (k+1) = \sum_{k=1}^{\infty} (-z)^{k+1} \cdot k$$

$$\boxed{\frac{z^2}{(1+z)^2} = \sum_{k=2}^{\infty} (-z)^k \cdot (k-1)}$$

Formula de Cauchy

$f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ cont y holomorfa en $\Omega \setminus \{p\}$ r tq
$D(p,r) \subset \Omega \Rightarrow \forall z_0 \in D(p,r)$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(p,r)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

donde $\partial D(p,r)$ es la circunferencia de centro p y radio $r > 0$ recorrida en sentido antihorario

Desarrollo en Serie Taylor

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-p)^k ; \ \forall z \in D(p,r)$$

donde $c_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(p) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(p,r)} \frac{f(\omega)}{(\omega - p)^{k+1}} d\omega$.

$\boxed{P2}$ Evalue. $\int_0^{2\pi} e^{(e^{i\theta} - i\theta)} d\theta$.

$$\left.\frac{de^z}{dz}\right|_0 = \frac{1!}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{\exp(\omega)}{(\omega - 0)^2} d\omega$$

parametrizamos $|z| = 1$ como
$\gamma(\theta) = e^{i\theta}$
$\gamma'(\theta) = ie^{i\theta}$.
$\theta \in [0, 2\pi]$

luego $$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{\exp(e^{i\theta})\, ie^{i\theta}}{(e^{i\theta})^2}$$

$$= \frac{i}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{e^{e^{i\theta}}}{e^{i\theta}} d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta} - i\theta} d\theta = e^0 = 1.$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}-i\theta}\, d\theta = 2\pi}$$

(b) $u(z)+iv(z)$ holomorfa en $|z|<1$.

Primero veamos que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} f(z)^2 \frac{dz}{z} = f(0)^2$$

Para esto basta tomar $g(z)=f(z)^2$

$$\Rightarrow g(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} \frac{g(z)\, dz}{z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} \frac{f(z)^2 dz}{z}$$

Parametrizamos esto como $\gamma(\theta) = re^{i\theta}$ $\quad \gamma'(\theta) = rie^{i\theta}$

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})^2\, ire^{i\theta}}{re^{i\theta}}\, d\theta = f(0)^2$$

$$f(0)^2 = u^2(0) - v^2(0) + 2i\, v(0)u(0)$$

Por otro lado

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})^2 - v(re^{i\theta})^2 + 2i\, v(re^{i\theta})\, u(re^{i\theta})\, d\theta$$

Igualando parte real e imaginaria

$$\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})^2 - \int_0^{2\pi} v(re^{i\theta})^2 = 2\pi\left(u^2(0)-v^2(0)\right)$$

$$= 0.$$

P3 Calcule $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b\,\mathrm{sen}(\theta)}$ con $a > |b| \geq 0$

Sol si $b = 0 \Rightarrow I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a} = \frac{2\pi}{a}$

si $b \neq 0$. Caso 1: $b < 0$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + -|b|\,\mathrm{sen}(\theta)} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + |b|\,\mathrm{sen}(-\theta)} \underset{CV:\, u = -\theta}{\uparrow} = -\int_0^{-2\pi} \frac{d\theta}{a + |b|\,\mathrm{sen}\,\theta}$$

$$= \int_{-2\pi}^{0} \frac{d\theta}{a + |b|\,\mathrm{sen}\,\theta} \underset{CV:\, u = \theta + 2\pi}{\overset{=}{\uparrow}} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + |b|\,\mathrm{sen}\,\theta}$$

Caso 2 $b \geq 0$ $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + |b|\,\mathrm{sen}(\theta)}$.

Luego, en cualquier caso:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + |b|\,\mathrm{sen}(\theta)}$$

Buscamos un f tal que $\int_{\partial D(0,1)} f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + |b|\,\mathrm{sen}(\theta)}$

Para ello parametrizamos $\partial D(0,1)$ como $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$ y reescribimos la integral

$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\, i e^{i\theta} = \int_{\partial D(0,1)} f(z)\,dz$$

nos interesa que $f(e^{i\theta})\, i e^{i\theta} = \frac{1}{a + |b|\,\mathrm{sen}\,\theta} = \frac{1}{a + |b|\left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)}$

$$\Rightarrow f(e^{i\theta}) = \frac{1}{i e^{i\theta}} \cdot \frac{1}{a + |b|\left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)}$$

Luego $f(z) = \frac{1}{iz} \cdot \frac{1}{a + |b|\left(\frac{z - z^{-1}}{2i}\right)}$ sirve

Veamos los Residuos de f

$$f(z) = \frac{1}{i}\,\frac{1}{za + \frac{|b|z^2}{2i} - \frac{|b|}{2i}} = \frac{2}{2iaz + |b|z^2 - |b|}$$

Los polos de $f(z)$ son los $z \in \mathbb{C}$ tq

$$2iaz + |b|z^2 - |b| = 0 \iff z^2 + \frac{2ia}{|b|}z - 1 = 0$$

$$\iff z = \frac{-ia}{|b|} \pm \sqrt{\underbrace{1 - a^2/b^2}_{<0}} = \left(-\frac{a}{|b|} \pm \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}\right)i$$

Para ocupar el theo de los residuos queremos ver cuando $z \in D(0,1)$.

$z \in D(0,1) \iff |z| < 1$ Veamos que.

$$z_1 = i\left(\frac{-a}{|b|} + \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}\right)$$

$$z_2 = i\left(\frac{-a}{|b|} - \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}\right)$$

$$\Rightarrow z_1 \cdot z_2 = -\left(\frac{a^2}{b^2} - \left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right)\right) = -1$$

$$\Rightarrow |z_1| \cdot |z_2| = 1$$

Así $|z_1| < 1 \iff |z_2| > 1$

Pero

$$|z_2| = \left|\frac{+a}{|b|} + \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}\right| = \frac{a}{|b|}\Bigg/\Bigg(\underbrace{1 + \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}}_{>1}\Bigg) > 1$$

$$\Rightarrow z_2 \notin D(0,1).$$

Con esto cual $f(z)$ tiene solo un residuo al interior del disco

$$\Rightarrow \mathrm{Res}_\Gamma(f, z) = \lim_{z \to z_1} (z - z_1) f(z)$$

Ahora bien $f(z) = \dfrac{2}{|b|\left(z^2 + \frac{2ia}{|b|}z + 1\right)} = \dfrac{2}{|b|(z - z_1)(z - z_2)}$

$$\Rightarrow \mathrm{Res}_\Gamma(f, z_1) = \frac{2}{|b|(z_1 - z_2)} = \frac{2}{+|b|i\left(2\sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}\right)} = \frac{+1}{i\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{-i}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

$$\Rightarrow \int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i\left(\frac{-i}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$