Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Matemática.
Santiago, 23 de Septiembre de 2008. Tiempo: 3:00 hrs.

CONTROL 1: MA2A2 Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Problema 1.

(a) [2.0 pts.] Sea S la superficie de ecuación $x^2 + y^2 - (z-6)^2 = 0$ para $3 \le z \le 6$. Bosqueje S, indique gráficamente una orientación sobre S y calcule el flujo neto a través de S del campo $\vec{F} = x(3-z)\hat{\imath} + y(3-z)\hat{\jmath} + (3-z)^2\hat{k}$.

(b) [2.0 pts.] Sea $\vec{F} = yx^2\hat{\imath} - xz\hat{\jmath} + 3y\hat{k}$. Considere la superficie S del paraboloide $2x = z^2 + y^2$ para $0 \le x \le 2$. Bosqueje S, indique gráficamente una orientación sobre S y evalúe la integral de flujo del <u>rotor</u> de $\vec{F}$ a través de S.

(c) [2.0 pts.] Determine los valores de las constantes α, β y γ para que el campo vectorial $\vec{F} = (x + 2y + \alpha z)\hat{\imath} + (\beta x - 3y - z)\hat{\jmath} + (4x + \gamma y + 2z)\hat{k}$ sea conservativo, en cuyo caso encuentre un potencial para $\vec{F}$.

Problema 2.

(a) [3.0 pts.] Sea Γ la curva que se obtiene de intersectar el casquete esférico unitario (centrado en el origen) con la superficie de ecuación $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Considere Γ recorrida en sentido antihorario. Calcule la circulación a lo largo de Γ del siguiente campo descrito en coordenadas cilíndricas: $\vec{F}(\rho, \theta, z) = (z - \rho)\dfrac{\theta^2}{2}\hat{\rho} + z\theta\hat{\theta} + \dfrac{\theta^2}{2}\rho\hat{k}$.

(b) [3.0 pts.] Considere el campo en coordenadas esféricas dado por $\vec{F} = r^2\hat{r} + r\,\mathrm{sen}^3\varphi\,\theta\,\hat{\theta}$. Calcule $\mathrm{div}\vec{F}$ en todo punto del dominio de diferenciabilidad de $\vec{F}$. Sea Ω la región de la esfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$ que intersecta al cono infinito $z \ge \sqrt{x^2 + y^2}$. Bosqueje Ω y encuentre el valor de $I = \iiint_\Omega \mathrm{div}\vec{F}\,dV$.

Problema 3. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto acotado de frontera regular a trozos $\partial\Omega$, orientada según la normal exterior. Consideremos un campo escalar ϕ de clase C^2 en un dominio $\mathcal{U} \supseteq \Omega \cup \partial\Omega$ y supongamos que ϕ es armónico en Ω, es decir, $\Delta\phi = 0$ en Ω. Sea $\vec{p} \in \mathrm{int}(\Omega)$ y definamos la función $\psi(\vec{x}) = 1/\|\vec{x} - \vec{p}\|$

(a) [1.0 pto.] Calcule $\nabla\psi(\vec{x})$ para $\vec{x} \ne \vec{0}$. Muestre que $\Delta\psi = 0$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{p}\}$.

(b) [3.0 pts.] Sea $B(\vec{p}, \delta) \subseteq \Omega$ la esfera de centro $\vec{p}$ y radio δ, contenida en Ω. Pruebe que

$$\iint_{\partial\Omega} (\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi) \cdot d\vec{S} = \iint_{\partial B(\vec{p},\delta)} (\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi) \cdot d\vec{S}$$

(c) [2.0 pts.] Muestre directamente que $\lim\limits_{\delta \to 0^+} \iint_{\partial B(\vec{p},\delta)} (\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi) \cdot d\vec{S} = -4\pi\phi(\vec{p})$ y concluya que

$$\phi(\vec{p}) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\partial\Omega} (\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi) \cdot d\vec{S}$$

<u>Observación</u>: Esto prueba que es posible reconstruir la función armónica ϕ al interior del dominio Ω a partir del conocimiento de ϕ y su gradiente $\nabla\phi$ sobre el borde $\partial\Omega$.