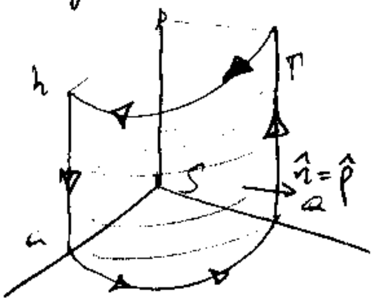
Calculo vectorial

Problema 1 Considere el campo $\vec{F} = e^{\theta\cos(\theta)}\hat{\theta} + e^{\sin(\theta)}\hat{k}$. Calcule el trabajo de este campo sobre la curva del dibujo



Sol En este caso, se puede usar el teorema de Stokes:

$$\oint_{\Gamma} \vec{F}\,d\vec{r} = \iint_S \text{rot}(\vec{F})\,d\vec{S} \quad , \quad S \text{ superficie tq } \partial S = \Gamma$$

consideremos $S = \left\{ \vec{r}(\theta, z) \;\middle|\; \begin{array}{l} \theta \in [0, \pi/2] \\ h \in [0, h] \end{array} \right\}$

Ahora, $\text{rot}(\vec{F}) = \dfrac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\hat{\theta} & \hat{k} \\ \partial_\rho & \partial_\theta & \partial_z \\ 0 & \rho e^{\theta\cos(\theta)} & e^{\sin(\theta)} \end{vmatrix}$

$$= \frac{1}{\rho}\left(\hat{\rho}\,\partial_\theta e^{\sin(\theta)} - \rho\hat{\theta}\,0 + \hat{k}\,\partial_\rho(\rho e^{\theta\cos\theta})\right)$$

$$= \frac{1}{\rho}\left(\hat{\rho}\, e^{\sin\theta}\cdot\cos(\theta) + \hat{k}\,\alpha\right)$$

$$\rightarrow \int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot}(\vec{F})\,d\vec{S} = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{z=0}^{h} \frac{1}{a}\hat{\rho}\, e^{\sin(\theta)}\cos(\theta)\cdot\hat{\rho}\; a\,d\theta\,dz$$

$$= \frac{ha}{a}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin(\theta)}\cos(\theta)\,d\theta$$

$$= h\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \partial_\theta\left(e^{\sin(\theta)}\right)d\theta$$

$$= h\left(e^{\sin(\pi/2)} - e^{\sin(0)}\right)$$

$$= h$$

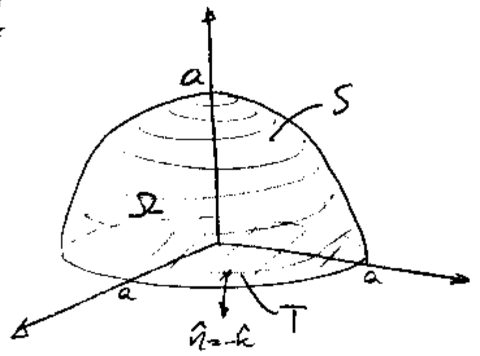
//

Problema 2 Sea el campo

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(\operatorname{sen}(x+y),\ \sqrt{x^2+z^2}+y,\ -z\cos(x+y)\right)$$

Calcule el flujo de $\vec{F}$ sobre la semiesfera $x^2+y^2+z^2=a^2$, $y\geq 0$.

sol



Calculemos la divergencia del campo para ver si es decente:

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \partial_x(\operatorname{sen}(x+y)) + \partial_y\left(\sqrt{x^2+z^2}+y\right) + \partial_z(-z\cos(x+y))$$

$$= \cos(x+y) + 1 - \cos(x+y)$$

$$= 1$$

Entonces, por el teorema de la divergencia,

$$\iiint_\Omega \operatorname{div}(\vec{F})\, dV = \iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} + \iint_T \vec{F}\cdot d\vec{S}$$

$$\Rightarrow \iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iiint_\Omega dV - \iint_T \vec{F}\cdot d\vec{S} = \frac{2\pi}{3}a^3 - \iint_T \vec{F}\, d\vec{S}$$

Ahora, $\displaystyle\iint_T \vec{F}\, d\vec{S} = \iint_T \vec{F}\cdot\hat{n}\, dS = \iint_T \vec{F}\cdot(-\hat{k})\, dS = \iint_T z\cos(x+y)\, dS$ pero en T, $z=0$

$$= 0$$

$$\Rightarrow \iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \frac{2\pi}{3}a^2$$

Problema 3 Usar el teorema de Green para demostrar que

$$\int_C (x^2+xy)\,dx + (y^2+x^2)\,dy = 0$$

donde C es el cuadrado definido por $x=1$, $x=-1$, $y=1$, $y=-1$

Sol Green es Stokes en el plano:

$$\bar{F}(x,y,z) = f_x(x,y)\,\hat{\imath} + f_y(x,y)\,\hat{\jmath} + 0\hat{k}$$

$$\Rightarrow \quad \text{rot}(\bar{F}) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ f_x & f_y & 0 \end{vmatrix} = \hat{\imath}\,0 - \hat{\jmath}\,0 + \hat{k}\left(\partial_x f_y - \partial_y f_x\right)$$

Así, si C es una curva cerrada decente, orientada en sentido antihorario, y S una superficie tq $\partial S = C$, $S \cup C \subseteq$ Plano (xy),

$$\oint_C \bar{F}\cdot d\bar{r} = \iint_S \text{rot}(\bar{F})\,dS$$

$$\oint_C (f_x\hat{\imath} + f_y\hat{\jmath})(dx\,\hat{\imath} + dy\,\hat{\jmath}) = \iint_S \hat{k}(\partial_x f_y - \partial_y f_x)\,\hat{k}\,dx\,dy$$

$$\oint_C f_x\,dx + f_y\,dy = \iint_S (\partial_x f_y - \partial_y f_x)\,dx\,dy$$

Entonces, en nuestro caso $f_x = x^2+xy$, $f_y = y^2+x^2$

$$\partial_x f_y = 2x \; ; \; \partial_y f_x = x$$

$$\iint_S (\partial_x f_y - \partial_y f_x)\,dx\,dy = \iint_S (2x-x)\,dx\,dy = \int_{x=-1}^{1}\int_{y=-1}^{1} x\,dx\,dy$$

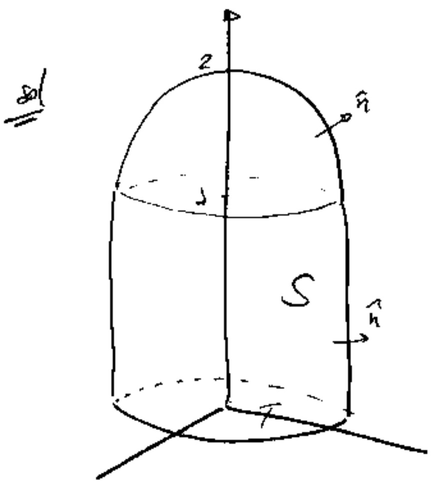
$$= \frac{x^2}{2}\,y \Big|_{x=-1}^{1}\Big|_{y=-1}^{1} = 0 \quad //$$

Problema 4 Sea S la superficie cilíndrica con tapa mostrada en la figura. S es la unión de dos superficies S_1 y S_2 donde $S_1 = \{ x^2+y^2=1 \,,\; 0 \leq z \leq 1 \}$,

$S_2 = \{ x^2+y^2+(z-1)^2 \,,\; z \geq 1 \}$ Sea $\vec{F} = (zx + z^2 y + x)\hat{\imath} + (z^3 xy + y)\hat{\jmath} + z^4 x^2 \hat{k}$.

Calcule $\iint_S \operatorname{rot}(\vec{F})\, d\vec{S}$.

sol



Calculemos $\operatorname{rot}(\vec{F})$

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ zx+z^2y+x & z^3xy+y & z^4x^2 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{\imath}\left(-3xyz^2\right) - \hat{\jmath}\left(z^4 2x - (x+2yz)\right) + \hat{k}\left(z^3y - z^2\right)$$

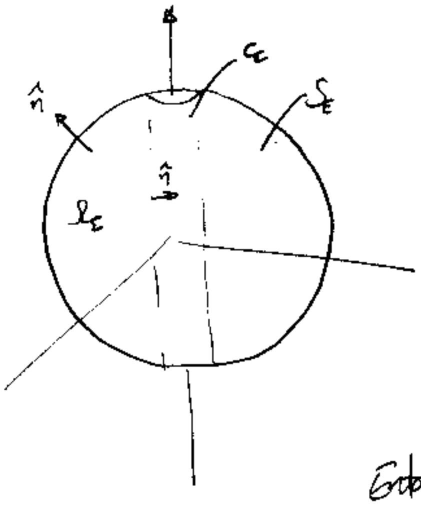
Ahora, por el teorema de la divergencia, se tiene que

$$\iint_S \operatorname{rot}(\vec{F})\, d\vec{S} = \iint_T \operatorname{rot}(\vec{F})\, d\vec{S} \qquad \text{, donde en } T,\ z=0,\ \hat{n}=\hat{k}$$

$$= 0$$

Problema 5 Considere el campo vectorial $\vec{F}(\rho,\theta,z) = \phi \frac{\hat{\rho}}{\rho}$, y la superficie $S = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2=a^2\}$. Calcule $\oiint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$.

Sol Usamos el teorema de la divergencia; para ello, consideremos el volumen Ω_ε



y su borde $S_\varepsilon \cup C_\varepsilon$. ($C_\varepsilon$ es un cilindro de radio ε)

en $\mathbb{R}^3\setminus\{\rho=0\}$, tenemos

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{1}{\rho}\left(\partial_\rho\left(\phi\frac{1}{\rho}\,\rho\,1\right) + 0\right) = 0$$

Entonces, $\iint_{S_\varepsilon} \vec{F}\cdot d\vec{S} + \iint_{C_\varepsilon} \vec{F}\cdot d\vec{S} = 0$, y $\iint_{S_\varepsilon} \vec{F}\cdot d\vec{S} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \oiint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$.

¿Ahora, cómo se parametrizaría C_ε?

por $\theta\in[0,2\pi)$ y $z\in[-h,h]$, con h tq

$$x^2+y^2+h^2 = a^2 \quad , \quad x^2+y^2=\varepsilon^2$$

$$h^2 = a^2-\varepsilon^2$$

$$\Rightarrow \boxed{h=\sqrt{a^2-\varepsilon^2}}$$

Entonces
$$\iint_{C_\varepsilon} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{z=-h}^{h} \phi\,\frac{\hat{\rho}}{\cancel{\varepsilon}}\cdot(-\hat{\rho})\,\cancel{\varepsilon}\,d\theta\,dz$$

$$= -\phi\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{z=-h}^{h} d\theta\,dz = -\phi\cdot 2\pi\cdot 2h$$

$$= -4\pi h = -4\pi\sqrt{a^2-\varepsilon^2}$$

$$\Rightarrow \iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{S_\varepsilon}\vec{F}\cdot d\vec{S} = \lim_{\varepsilon\to 0} -\iint_{C_\varepsilon}\vec{F}\cdot d\vec{S} = \lim_{\varepsilon\to 0} 4\pi\sqrt{a^2-\varepsilon^2} = 4\pi a$$