Clase Auxiliar #3 Cálculo Avanzado y Aplicaciones

HR; GI, VR

MA2002-4 Prim '08

|| Integral de Trabajo
|| Teorema de Stokes

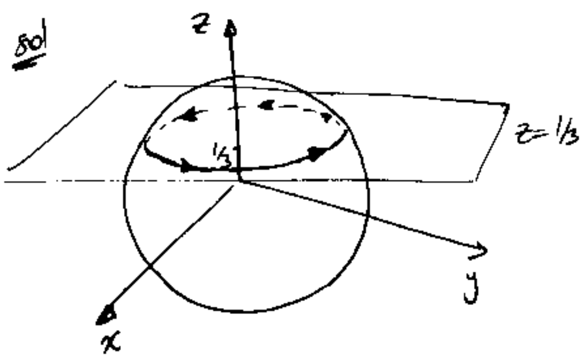
Problema 1 Calcule el trabajo efectuado por el campo vectorial

$$\vec{F}(x,y,z) = \frac{x^2}{x^2+y^2}\,\hat{\imath} + \frac{xy}{x^2+y^2}\,\hat{\jmath} + e^z\,\hat{k}$$

al recorrer en sentido antihorario la curva $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^3$ definida por las ecuaciones

$$\left\| \begin{array}{l} x^2+y^2+z^2 = 1 \\ z = 1/3 \end{array} \right.$$

sol



Recordemos que al hacer el cambio de coordenadas (de cartesianas a cilíndricas) llegamos a

$$\vec{F}(\rho,\theta,z) = \cos(\theta)\,\hat{\rho} + e^z\,\hat{k}$$

Ahora, faltaría pasar a coordenadas cilíndricas el camino.

Consideremos $\gamma(\theta) = R\hat{\rho} + \frac{1}{3}\hat{k}$ (es la parametrización de la circunferencia).

Entonces, para que $\gamma(\theta)$ sea la parametrización debe tenerse que

$$x^2+y^2+z^2 = 1 \quad , \text{con } z = 1/3$$

$$x^2+y^2+1/3^2 = 1$$

$$R^2 = \frac{8}{9} \Rightarrow \boxed{R = \frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

Ahora, $d\gamma = \frac{d\gamma(\theta)}{d\theta}\,d\theta = R\,\frac{d\hat{\rho}}{d\theta}\,d\theta = R\,\hat{\theta}\,d\theta$

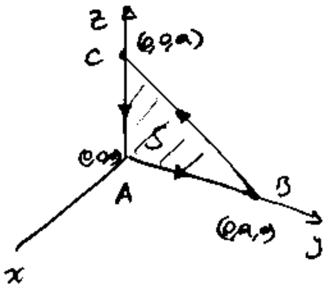
Entonces $\displaystyle\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\theta=0}^{2\pi} \vec{F}(\gamma(\theta))\cdot \frac{d\gamma(\theta)}{d\theta}\, d\theta$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\cos(\theta)\hat{\rho} + e^{1/3}\hat{k}\right)\cdot \frac{2\sqrt{2}}{3}\,\hat{\theta}\, d\theta = 0$$

↳ por $\hat{\rho}\perp\hat{\theta}$, $\hat{k}\perp\hat{\theta}$.

Problema 2 Sea $\vec{F} = (y^2, z^2, x^2)$. Calcular $\oint_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$, donde Γ es el triángulo de vértices $(0,0,0)$, $(0,a,0)$, $(0,0,a)$, recorrido en ese orden, y compruebe el teorema de Stokes. $(a>0)$

Sol



Sean $A=(0,0,0)$, $B=(0,a,0)$, $C=(0,0,a)$, y

sean $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, definidas por

$\Gamma_1 = \{\gamma_1(t) \mid t\in[0,a]\}$

$\Gamma_2 = \{\gamma_2(t) \mid t\in[0,a]\}$

$\Gamma_3 = \{\gamma_3(t) \mid t\in[0,a]\}$

donde
$$\gamma_1(t) = t\hat{j} = (0,t,0) \Rightarrow d\gamma_1(t) = \hat{j}\,dt$$
$$\gamma_2(t) = t\hat{k} + (a-t)\hat{j} = (0, a-t, t) \Rightarrow d\gamma_2(t) = (0,-1,1)dt = (-\hat{j}+\hat{k})dt$$
$$\gamma_3(t) = (a-t)\hat{k} = (0,0,a-t) \Rightarrow d\gamma_3(t) = (0,0,-1)dt = -\hat{k}\,dt$$

Entonces, $\displaystyle\oint_\Gamma \vec{F}\,d\vec{r} = \int_{\Gamma_1}\vec{F}\,d\vec{r} + \int_{\Gamma_2}\vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{\Gamma_3}\vec{F}\cdot d\vec{r}$

$$= \int_0^a \vec{F}(\gamma_1(t))\frac{d\gamma_1(t)}{dt}dt + \int_0^a \vec{F}(\gamma_2(t))\frac{d\gamma_2(t)}{dt}dt + \int_0^a \vec{F}(\gamma_3(t))\frac{d\gamma_3(t)}{dt}$$

$$= \underbrace{\cancel{\int_0^a (t^2,0,0)\cdot\hat{j}\,dt}}_{\Rightarrow 0} + \int_0^a ((a-t)^2, t^2, 0)\cdot(-\hat{j}+\hat{k})\,dt + \underbrace{\cancel{\int_0^a (0,(-t)^2,0)\cdot(-\hat{k})\,dt}}_{\Rightarrow 0}$$

$$= -\int_0^a t^2\,dt = \frac{-a^3}{3}$$

Ahora, para ver si se cumple el teorema de Stokes, necesitamos que el campo sea $\mathcal{C}^1$ y la superficie sea $\mathcal{C}^1$ con borde regular por tramos, orientable.

Consideramos la superficie S que es el triángulo ABC sobre el plano $\{x=0\}$. Es $\mathcal{C}^1$, con borde regular por tramos, y orientable según mano derecha: $\hat{n} = \hat{\imath}$.

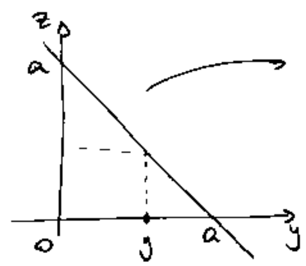
Entonces
$$\oint_{\partial S} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot}(\vec{F})\cdot d\vec{S} \qquad \text{con } \partial S = \Gamma$$

Primero calculamos el rotor de $\vec{F}$:

$$\text{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y^2 & z^2 & x^2 \end{vmatrix} = \hat{\imath}\left(\partial_y x^2 - \partial_z z^2\right) - \hat{\jmath}\left(\partial_x x^2 - \partial_z y^2\right) + \hat{k}\left(\partial_x z^2 - \partial_y y^2\right)$$

$$= \hat{\imath}\,(-2z) - \hat{\jmath}\,(2x) + \hat{k}\,(-2y) = -2\left(z, x, y\right)$$

Ahora, parametrizamos la superficie S:



Recta $y+z=a$

Si $y \in [0,a]$, acotamos los valores de z

$z \in [0, a-y]$

Ahora, calculamos el flujo.

$$\iint_S \text{rot}(\vec{F})\cdot d\vec{S} = \iint_S \text{rot}(\vec{F})\cdot \hat{n}\, dS = \int_{y=0}^{a}\int_{z=0}^{a-y} -2\,(z,x,y)\cdot\hat{\imath}\; dz\,dy$$

$$= -2\int_{y=0}^{a}\int_{z=0}^{a-y} z\,dz\,dy = -\cancel{2}\int_{y=0}^{a} \frac{(a-y)^2}{\cancel{2}}\,dy \qquad \begin{cases} a-y=\omega \\ dy=-d\omega \end{cases}$$

$$= -\int_{\omega=a}^{0} -\omega^2\,d\omega = -\int_{\omega=0}^{a} \omega^2\,d\omega \qquad \begin{Vmatrix} y=a \Rightarrow \omega=0 \\ y=0 \Rightarrow \omega=a \end{Vmatrix}$$

$$= \frac{-a^3}{3}$$

Se verifica que se cumple el teorema de Stokes

Problema 3 Considere el campo vectorial dado por $\vec{F} = \frac{1}{\rho}\hat{\rho} + e^{-\text{sen}^2(z)}\hat{k}$

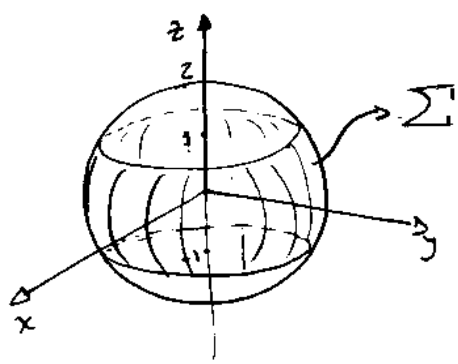
a) Determinar el dominio de diferenciabilidad de $\vec{F}$ y pruebe que $\text{div}(\vec{F}) = 0$ donde $\vec{F}$ es diferenciable.

b) Sea $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ la superficie dada por la porción de casquete esférico $\{x^2+y^2+z^2=4\}$ que se encuentra entre los planos $\{z=\pm 1\}$ (sin considerar las tapas). Bosqueje la superficie Σ y calcule el flujo a través de Σ orientada según normal exterior.

Sol) a) Notemos que si $\rho=0$, el campo se indefine. Entonces

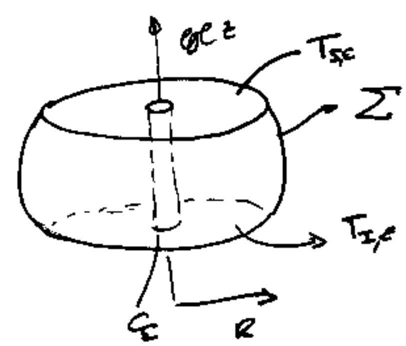
Dominio de diferenciabilidad $= D = \mathbb{R}^3 \setminus \{\rho=0\} = \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{eje } z\}$

b)



Calculemos el flujo a través de Σ. Para ello usamos el teorema de Gauss. Definimos entonces

$\Omega_\varepsilon =$



sacando el cilindro de radio ε.

la gracia es hacer $\varepsilon \to 0$ al final.

Por el teorema de la divergencia,

$$\oint_{\partial\Omega_\varepsilon} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \int_{\Omega_\varepsilon} \text{div}(\vec{F})\, dr$$

$$\int_{\Sigma} \vec{F}\cdot d\vec{S} + \int_{T_{S\varepsilon}} \vec{F}\cdot d\vec{S} + \int_{T_{I\varepsilon}} \vec{F}\cdot d\vec{S} + \int_{C_\varepsilon} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \int_{\Omega_\varepsilon} \text{div}(\vec{F})\, dr$$

Calculamos la divergencia de $\vec{F}$:

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{1}{\rho}\left(\partial_\rho\left(\frac{1}{\rho}\rho 1\right) + \partial_\theta(0) + \partial_z\left(e^{-\operatorname{sen}^2(\theta)}\cdot\rho\right)\right) = 0 \quad \text{si } \rho \neq 0$$

Así,
$$\int_\Sigma \vec{F}\cdot d\vec{S} = -\int_{T_{I,\varepsilon}} \vec{F}\cdot d\vec{S} - \int_{T_{S,\varepsilon}} \vec{F}\cdot d\vec{S} - \int_{C_\varepsilon} \vec{F}\cdot d\vec{S}$$

- En $T_{I,\varepsilon}$, $\hat{n} = -\hat{k}$, $z=-1$, y entonces el radio máximo será $R = \sqrt{x^2+y^2}\Big|_{z=-1}$

$$x^2+y^2+z^2 = 4 \Rightarrow R^2+1 = 4$$
$$R^2 = 3 \Rightarrow \boxed{R=\sqrt{3}}$$

$T_{I,\varepsilon}$ está parametrizada por $\rho\in[\varepsilon, R]$, $\theta\in[0,2\pi)$

$$\Rightarrow \int_{T_{I,\varepsilon}} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \int_{\rho=\varepsilon}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(\frac{1}{\rho}\hat{\rho} + e^{-\operatorname{sen}^2(\theta)}\hat{k}\right)\cdot(-\hat{k})\,\rho\, d\theta\, d\rho$$
$$= -\int_{\rho=\varepsilon}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi} e^{-\operatorname{sen}^2(\theta)}\rho\, d\theta\, d\rho$$

- En $T_{S,\varepsilon}$, $\hat{n}=\hat{k}$, $z=1$ y $R = \sqrt{x^2+y^2}\Big|_{z=1} = \sqrt{3}$

$$\int_{T_{S,\varepsilon}} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \int_{\rho=\varepsilon}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(\frac{1}{\rho}\hat{\rho} + e^{-\operatorname{sen}^2(\theta)}\hat{k}\right)\hat{k}\,\rho\, d\theta\, d\rho$$
$$= \int_{\rho=\varepsilon}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi} e^{-\operatorname{sen}^2(\theta)}\rho\, d\theta\, d\rho$$

- En C_ε, $\hat{n} = -\hat{\rho}$ (la normal exterior a Ω_ε). C_ε está parametrizada por

$$z\in[-1,1],\ \theta\in[0,2\pi]\ ;\ \rho=\varepsilon$$

$$\Rightarrow \int_{C_\varepsilon} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \int_{z=-1}^{1}\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(\frac{1}{\varepsilon}\hat{\rho} + e^{-\operatorname{sen}^2(\theta)}\hat{k}\right)(-\hat{\rho})\,\varepsilon\, d\theta\, dz$$
$$= -\int_{z=-1}^{1}\int_{\theta=0}^{2\pi}\frac{1}{\cancel{\varepsilon}}\cancel{\varepsilon}\, d\theta\, dz = -2\cdot 2\pi = -4\pi$$

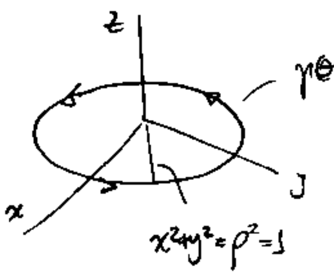
Así, $\int_{\Sigma} \vec{F}\, d\vec{S} = 4\pi$.

Problema 4 Sea el campo vectorial $\vec{F}(r,\phi,\theta) = e^{-r^3}\hat{r} + r\,\theta \operatorname{sen}\phi\ \hat{\phi}$ (en coordenadas esféricas), y Γ la curva dada por las ecuaciones $x^2+y^2=1$, $z=0$, orientada en sentido antihorario. Calcule el trabajo que ejerce $\vec{F}$ a lo largo de la curva Γ. ¿Es aplicable el teorema de Stokes?

Sol Primero, notamos que el campo no es continuo en $\theta=2\pi$, pues $\hat{r}(r,\phi,0)=\hat{r}(r,\phi,2\pi)$ $\forall\, r,\phi$, pero $\vec{F}(r,\phi,0) = e^{-r^3}\hat{r} \neq e^{-r^3}\hat{r} + r(2\pi)\operatorname{sen}(\phi)\,\hat{\phi} = \vec{F}(r,\phi,2\pi)$.

Entonces el teorema de Stokes no es aplicable.

Entonces parametrizamos la curva:



$$\gamma(\theta) = 1\cdot\hat{\rho} + 0\,\hat{k} \qquad , \ \theta\in[0,2\pi)$$

$$\Rightarrow \frac{d\gamma(\theta)}{d\theta} = \hat{\theta}$$

Entonces, $$\int_{\Gamma} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(e^{-1^3}\hat{r} + 1\cdot\theta\operatorname{sen}(\phi)\,\hat{\phi}\right)\hat{\theta}\ \overbrace{1\,d\theta}^{dr}$$

$$= 0 \qquad \text{pues } \hat{r}\perp\hat{\theta},\ \hat{\phi}\perp\hat{\theta}.$$

Problema 5 Considere el campo vectorial en $\mathbb{R}^2$ dado por

$$\vec{F}(x,y) = \left(2xy^2\cos(x^2y^2) + \frac{2x}{x^2+y^2+1}\ ,\ 2x^2y\cos(x^2y^2) + \frac{2y}{x^2+y^2+1}\right)$$

Calcule el trabajo efectuado por dicho campo en alguna curva Γ (simple, regular por tramos) cerrada; también sobre una curva Γ_0 simple, regular por tramos, que una el $(0,0)$ con el $(5,4)$.

Sol Primero, notemos que las componentes del campo son similares. Entonces el campo puede ser conservativo. Tratemos de encontrar el potencial ϕ.

$$\partial_x \phi = 2xy^2\cos(x^2y^2) + \frac{2x}{x^2+y^2+1} = F_x$$

$$\Rightarrow \phi_c = \operatorname{sen}(x^2y^2) + \ln(x^2+y^2+1) + C$$

$$\Rightarrow \partial_y \phi_c = \cos(x^2y^2)\, 2yx^2 + \frac{2y}{x^2+y^2+1} = F_y$$

Entonces ϕ_c es un potencial para $\vec{F}$ (en el sentido que $\nabla\phi_c = \vec{F}$)

Por lo tanto, la integral de trabajo sobre una curva no depende de la trayectoria, sino que del punto final y del inicial: si Γ está parametrizada por $\gamma(t)$, $t\in[a,b]$

$$\int_\Gamma \vec{F}\, d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t))\,\frac{d\gamma(t)}{dt}\,dt = \int_a^b \nabla\phi_c(\gamma(t))\,\frac{d}{dt}\gamma(t)\,dt$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt}(\phi_c \circ \gamma)(t)\,dt$$

$$= \phi_c(\gamma(b)) - \phi_c(\gamma(a))$$

·) Si Γ es cerrada, $\gamma(b) = \gamma(a)$, por lo que $\int_\Gamma \vec{F}\, d\vec{r} = 0$

·) Si $\gamma(b) = (5,4)$, $\gamma(a) = (0,0)$, entonces

$$\int_{\Gamma_*} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \phi(\gamma(b)) - \phi(\gamma(a)) = \phi(5,4) - \phi(0,0)$$

$$= \operatorname{sen}(5^2 4^2) + \ln(4^2+5^2+1) + C - (\cancel{\operatorname{sen}(0^2 0^2)}^{\,0} + \cancel{\ln(0^2+0^2+1)}^{\,0} + C)$$

$$= \operatorname{sen}(400) + \ln(42)$$

//