MA2002 Cálculo Avanzado y Aplicaciones. Semestre 2009-02
Profesor: Felipe Álvarez **Auxiliares:** Francisco Collarte y Alfredo Torrico

Auxiliar Extra 2.0

Jueves 3 de Diciembre de 2009

P1. Sean $n \in \mathbb{N}$ y la función

$$F(z) = \frac{\text{sen}^n(i\pi z)}{(z-i)^n e^{(z-i)^2}}$$

(i) Demuestre usando la regla de l'Hopital que

$$\lim_{z\to i} F(z) = (-1)^n (i\pi)^n$$

Indicación: Pruebe informalmente que $\frac{d^k}{dz^k}\left[\text{sen}^n(i\pi z)\right]\big|_{z=i} = \begin{cases} 0 & 1 \leq k < n \\ n!(-1)^n(i\pi)^n & k = n \end{cases}$
Concluir que la función

$$G(z) = \frac{\text{sen}^n(i\pi z)}{(z-i)^{2n} e^{(z-i)^2}}$$

tiene un polo de orden n en $z = i$.

(ii) Calcule la siguiente integral

$$\oint_\Gamma \frac{\text{sen}^n(i\pi z)}{(z-i)^2 e^{(z-i)^2}} dz$$

Donde Γ es cualquier círculo centrado en el origen del plano complejo y de radio $R > 1$.

P2. Sea $u = v(\sqrt{x^2+y^2+z^2}, t)$ una solución con simetría radial de la ecuación de ondas

$$u_{tt} = c^2 \Delta u$$

(i) Probar que v satisface la ecuación $v_{tt} = c^2[v_{rr} + 2v_r/r]$ para $r \geq 0, t \geq 0$.

(i) Sea $w(r,t) = rv(r,t)$. Probar que w satisface la ecuación de ondas unidimensional.

(iii) Encontrar w para las condiciones iniciales $u(x,y,z,0) = exp(-r^2)$ y $u_t(x,y,z,0) = 0$.

P3. De acuerdo a la teoría de Yukawa para las fuerzas nucleares, la fuerza de atracción entre un neutrón y un protón tiene como potencial $U(r) = Ke^{-\alpha r}/r$ (coordenadas esféricas) para ciertas constantes $K < 0$ y $\alpha > 0$.

(i) Encuentre la fuerza $\vec{F} = -\nabla U$ en $\mathbb{R}^3 - \{\vec{0}\}$.

(ii) Calcule directamente el flujo de $\vec{F}$ a través del casquete esférico $r = a (a > 0)$ orientado según la normal exterior.

(iii) Pruebe que $\Delta U = \alpha^2 U$ en $\mathbb{R}^3 - \{\vec{0}\}$ (recuerde que $\Delta u = \text{div}\, \nabla u$).

(iv) Demuestre que si $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es un abierto acotado que contiene al origen, cuya frontera $\partial\Omega$ es una superficie regular a trozos y orientada según la normal exterior, entonces

$$\int\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{S} = 4\pi K - \alpha^2 \int\int\int_\Omega U dv$$

¿Contradice este resultado el teorema de la divergencia de Gauss? Explique.