PAUTA C3 - MA2002-2009

P3 Por separación de variables, buscamos una solución de la forma

$$U(t,x) = T(t)\,X(x) \qquad (0.5)$$

Sustituyendo en la EDP obtenemos

$$T''X + \alpha T'X + \beta TX = c^2 T X'' \qquad (0.5)$$

y dividiendo por TX (buscamos sols. no triviales)

$$\frac{T''}{T} + \alpha \frac{T'}{T} + \beta = c^2 \frac{X''}{X} \qquad (0.5)$$

luego para λ constante, resolvemos

$$\frac{X''}{X} = k_1 = \frac{\lambda}{c^2} \quad y \quad \frac{T''}{T} + \alpha\frac{T'}{T} + \beta = \lambda \qquad (0.5)$$

Como las CB son de tipo Dirichlet homogéneas y buscamos soluciones no triviales, entonces necesariamente se tiene que

$$X_k(x) = A_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \text{ con } \frac{\lambda_k}{c^2} = -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \qquad (0.5)$$

de modo que $\lambda_k = -c^2\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 = -\left(\frac{k\pi c}{L}\right)^2$, $k = 1, 2, \ldots$

Por otro lado, para T se tiene:

$$T_k'' + \alpha T_k' + \beta T_k = \lambda_k T_k$$

$$\Leftrightarrow \quad T_k'' + \alpha T_k' + (\beta - \lambda_k) T_k = 0 \qquad (0.5)$$

Esta última ecuación se resuelve con el método del polinomio característico en m:

$$m^2 + \alpha m + (\beta - \lambda_k) = 0$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4(\beta - \lambda_k)}}{2} \qquad (0.5)$$

$$= \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\beta + \frac{4k^2\pi^2c^2}{L^2}}}{2}$$

Pero por hipótesis

$$\alpha^2 < 4\beta + 4c^2\pi^2/L^2 \leq 4\beta + 4c^2\pi^2k^2/L^2 \quad , k = 1, 2, \ldots$$

de modo que todas las raíces son complejas

$$m_k = -\frac{\alpha}{2} \pm i \underbrace{\frac{\sqrt{4\beta L^2 - \alpha^2 - 4k^2\pi^2c^2}}{2L}}_{\omega_k}$$

y en consecuencia las soluciones son de la forma

$$T_k(t) = e^{-\frac{\alpha}{2}t}\left(B_k \operatorname{sen}(\omega_k t) + C_k \cos(\omega_k t)\right). \qquad (0.5)$$

Así

$$U_k(t,x) = T_k(t)X_k(x) = e^{-\frac{\alpha}{2}t}\left(B_k \operatorname{sen}(\omega_k t) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + C_k \cos(\omega_k t) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\right) \qquad (0.5)$$

Buscamos una solución $U(t,x)$ que sea superposición de las anteriores y que satisfaga las condiciones iniciales.

Como $u_t(0,x) = 0$ entonces basta tomar $T_k'(0) = 0$

Pero

$$T_k'(0) = -\frac{\alpha}{2} C_k + \omega_k B_k$$

(0.5)

$$\Rightarrow \quad C_k = \frac{2\omega_k}{\alpha} B_k$$

Así

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{+\infty} B_k e^{-\frac{\alpha}{2}t} \left[\operatorname{sen}(\omega_k t) + \frac{2\omega_k}{\alpha} \cos(\omega_k t) \right] \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$$

(0.5)

Evaluando en $t = 0$

$$f(x) = u(0,x) = \sum_{k=1}^{+\infty} B_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$$

de donde

$$B_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$$

(0.5)