PAUTA C3 - MA2002 - 2009

P2

(a) Para obtener la serie de senos de f en $[0,\pi]$, basta extenderla de forma <u>impar</u> $\bar{f}(x) = -f(-x)$ para $x \in [-\pi, 0[$ y encontrar la serie de Fourier de $\bar{f}$ en $[-\pi, \pi]$. (0.5)

Se obtiene entonces que

$$S_f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \qquad (0.5)$$

$$\text{con} \quad b_k = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right)dx \quad \text{para } L = \pi. \qquad (0.5)$$

Aquí

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(kx)\,dx + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} 2\operatorname{sen}(kx)\,dx \qquad (0.3)$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot -\frac{1}{k}\cos(kx)\Big|_{x=0}^{x=\pi/2} + \frac{4}{\pi}\cdot\frac{-1}{k}\cos(kx)\Big|_{x=\pi/2}^{x=\pi}$$

$$= \frac{2}{k\pi}\left[1 - \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) + 2\left[\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) - \cos(k\pi)\right]\right] \qquad (0.3)$$

$$\Rightarrow \boxed{b_k = \frac{2}{k\pi}\left[\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) + 1 - 2(-1)^k\right]} \qquad (*)$$

Por los teoremas vistos en cátedra, la serie converge a $f(x)$ ahí donde es diferenciable (y que en este caso la derivada es 0) (0.3) mientras que en los extremos y los puntos de discontinuidad, la serie converge al punto medio del salto, es decir

$$S_f(x) = \begin{cases} f(x) & 0 < x < \pi/2 \text{ y } \pi/2 < x < \pi \\ \frac{3}{2} & \text{si } x = \pi/2 \qquad (0.3) \\ 0 & \text{si } x = 0,\ x = \pi \qquad (0.3) \end{cases}$$

P2

(b) Tomemos $Y(t,x) = u(t,x) - x$. Tenemos que

$$Y_t = u_t \ , \ Y_x = u_x - 1 \ \text{ y } \ Y_{xx} = u_{xx} \qquad (0.5)$$

luego

$$Y_t = u_t = \alpha u_{xx} = \alpha Y_{xx} \ , \ t>0, \ 0<x<\pi \quad (0.3)$$

Además

$$Y(t,0) = u(t,0) = 0$$
$$Y(t,\pi) = u(t,\pi) - \pi = \pi - \pi = 0 \qquad (0.3)$$

y asimismo

$$Y(0,x) = u(0,x) - x = \begin{cases} 1 & \text{si } 0<x<\pi/2 \\ \frac{3}{2} & x = \pi/2 \\ 2 & \text{si } \pi/2 < x < \pi \end{cases} \qquad (0.3)$$

Por lo tanto, Y satisface la EDP del calor homogénea,
(0.3) con CB de tipo Dirichlet homogéneas y con condición inicial, esta última está dada por el límite puntual de la serie de senos de la parte (a).

Sabemos que

$$(0.5) \qquad Y(t,x) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \, e^{-\alpha\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \ , \ 0<x<L, \ t>0$$

con $\alpha = 2$ y $L=\pi$ en este caso. En $t=0$ obtenemos una
(0.5) serie de senos para la condición inicial, por lo tanto los coeficientes b_k son los ya calculados anteriormente.

En conclusión

$$(0.3) \quad u(t,x) = x + Y(t,x) = x + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \, e^{-2k^2 t} \operatorname{sen}(kx), \ t>0, \ 0<x<\pi.$$

con b_k dados por $(*)$

Observaciones:

P2 | (a) 0.5 por indicar que la extensión correcta es la impar

0.5 por expresar la serie de senos.

0.5 por expresar los coeficientes (usando o no paridad).

0.3 por separar las integrales e integrar correctamente.

0.3 por desarrollar y simplificar.

0.3 por identificar que $S_f(x) = f(x)$ ahí donde f es diferenciable.

0.3 por el límite puntual en $x = \pi/2$

0.3 por los límites en los extremos $x = 0$ y $x = \pi$

P2 | (b) 0.5 por relacionar las derivadas de Y y u.

0.3 por la EDP para Y

0.3 por las CB para Y

0.3 por la CI para Y

0.3 por reconocer el problema para Y

0.5 por la solución general en serie

0.5 por reconocer que los coef. b_k's son los mismos de la parte (a)

0.3 por obtener u.