PAUTA C3 – MA2002 – 2009

P1)

(a) Recordemos la definición de la T. de Fourier: $\mathcal{F}(f(x))(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-isy}dy$ (0.5)

Formalmente, podemos derivar e intercambiar con la integral:

$$\frac{d}{ds}\left[\mathcal{F}(f(x))(s)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial s}\left[f(y)e^{-isy}\right]dy = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} y f(y) e^{-isy}dy$$

$$= -i\,\mathcal{F}(x f(x))(s),$$ (0.5)

de donde se deduce la propiedad multiplicando por i.

(0.5) Sabemos que $\mathcal{F}(e^{-x^2/2})(s) = e^{-s^2/2}$. Por lo tanto, usando lo anterior:

- $\mathcal{F}(xe^{-x^2/2})(s) = i\frac{d}{ds}e^{-s^2/2} = -ise^{-s^2/2}$.
- $\mathcal{F}(x^2e^{-x^2/2})(s) = i\frac{d}{ds}\left[-ise^{-s^2/2}\right] = e^{-s^2/2} - s^2e^{-s^2/2} = (1-s^2)e^{-s^2/2}$ (0.5)

(b) Recordemos que $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2i}\left[e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right]$, por lo tanto (0.3)

$$\mathcal{F}(f(x)\operatorname{sen}(s_0x))(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(y)}{2i}\left[e^{is_0y} - e^{-is_0y}\right]e^{-isy}dy$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-i(s-s_0)y} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-i(s+s_0)y}dy\right]$$ (0.3)

$$= \frac{1}{2i}\left[F(s-s_0) - F(s+s_0)\right].$$

Ahora queremos encontrar la T. de Fourier de $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x)g(x)$ donde $g(x) = \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2-b^2)}$, $a>0$ y $b>0$.

Por lo visto anteriormente: $s_0 = \pi$ y tenemos

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{2i}\left[\hat{g}(s-\pi) - \hat{g}(s+\pi)\right] \qquad (0.3)$$

Notemos que $g(x) = \dfrac{1}{P(x)}$ con $P(x) = (x+ia)(x-ia)(x+b)(x-b)$ tiene grado $P = 4 > 0$.

de modo que g tiene 4 polos simples, 2 reales y 1 con parte imaginaria estrictamente positiva. Luego, para $s<0$, por los teoremas de integración usando residuos tenemos (0.5)

$$\hat{g}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)e^{-isy}\,dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big[\underbrace{2\pi i \operatorname{Res}(g(x)e^{-isx}; ia)}_{(0.3)} + \pi i\big(\operatorname{Res}(g(x)e^{-isx}; b) + \operatorname{Res}(g(x)e^{-isx}; -b)\big)\Big]$$

(0.3)

Como los polos son simples, tenemos que

$$\operatorname{Res}(g(x)e^{-isx}; ia) = \frac{e^{+as}}{2ai(ai-b)(ai+b)} = \frac{+ie^{as}}{2a(a^2+b^2)} \qquad (0.3)$$

$$\operatorname{Res}(\text{"} \ ;\pm b) = \pm\frac{e^{\mp ibs}}{2b(a^2+b^2)} \qquad (0.3)$$

Luego

$$\hat{g}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{-\cancel{2}\pi\, e^{as}}{\cancel{2}a(a^2+b^2)} + \frac{\pi i}{2b(a^2+b^2)}\left[e^{-isb} - e^{isb}\right]\right]$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{1}{a^2+b^2}\left[\frac{-e^{as}}{a} + \frac{\operatorname{sen}(bs)}{b}\right] \qquad \text{para } s<0 \ (0.3)$$

La fórmula funciona para $s=0$ pues el único residuo que sobrevive es el de ia (la suma de los residuos reales da 0). (0.5)
Para $s>0$ podemos reemplazar en lo anterior por $-s$ (esto porque $\hat{g}(s)$ es real, tb. se pueden ocupar argumentos de cambio de variable o tomar el polo imaginario opuesto).

Así

$$\hat{g}(s) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{1}{a^2+b^2}\left[\frac{e^{-a|s|}}{a} + \frac{\operatorname{sen}(b|s|)}{b}\right], \quad s\in\mathbb{R} \quad (0.3)$$

Finalmente

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{2i}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{1}{a^2+b^2}\left[\frac{e^{-a|s+\pi|} - e^{-a|s-\pi|}}{a} + \frac{\operatorname{sen}(|s+\pi|b) - \operatorname{sen}(|s-\pi|b)}{b}\right] (0.3)$$

Observaciones:

P1 (a)

0.5 por escribir correctamente la definición de la T. de Fourier.

0.5 por derivar formalmente intercambiando con la integral.

0.5 por conocer la T. de F. de $e^{-x^2/2}$

0.5 por aplicar correctamente, usando la propiedad.

P1 (b)

0.3 por conocer la expresión compleja del seno.

0.3 por sustituir correctamente en la definición de T. de F.

0.3 por identificar correctamente s_0 y $g(x)$.

0.5 por describir la estructura de g para aplicar residuos

0.3 por usar correctamente la fórmula para el polo imaginario

0.3 por usar " la fórmula de "semi-residuo" para los polos reales.

0.3 por el residuo del polo imaginario

0.3 por los residuos de los polos reales (por ambos, son análogos).

0.3 por simplificar y factorizar adecuadamente

0.5 por discutir los casos $s=0$ y $s>0$

0.3 por dar la fórmula general para $s\in\mathbb{R}$.

0.3 por sustituir en la fórmula de modulación