MA2002 Cálculo Avanzado y Aplicaciones. Semestre 2009-02
Profesor: Felipe Álvarez **Auxiliares:** Francisco Collarte y Alfredo Torrico

Transformada de Fourier

17 de noviembre de 2009

Dada una función f, la Transformada de Fourier de ella, se define como $\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-isy}dy$. Teniendo en cuenta aquello, y restringiéndonos al caso de una función a valores reales, es decir, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (hay otros casos, pero no son de nuestro interés), podemos decir que $\hat{f(s)} = \overline{\hat{f}(-s)}$. En efecto, evaluando en $-s$ en la definición de transformada se tiene que:

$$\hat{f}(-s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{isy}dy$$

Luego de esto (y gracias a que f es a valores reales), tomando el conjugado se obtiene lo que queríamos:

$$\overline{\hat{f}(-s)} = \overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{isy}dy} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(y)e^{isy}}dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\overline{e^{isy}}dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-isy}dy = \hat{f}(s)$$

De esto se deduce que para cualquier $s \in \mathbb{R}$ se cumple la propiedad $\hat{f(s)} = \overline{\hat{f}(-s)}$. Además de esto, se puede agregar el hecho de que si la Transformada misma es a valores reales entonces podemos concluir que es una función par, es decir, $\hat{f}(s) = \hat{f}(-s)$ para todo $s \in \mathbb{R}$.
Gracias a esto, dada una función f a valores reales (que es con lo que usualmente trabajamos), basta encontrar un caso en la transformada de Fourier. Esto quiere decir, que si obtenemos la T. de Fourier para el caso $s < 0$ y queremos conocer el caso $s > 0$, solo basta aplicar la propiedad antes explicada. Por ejemplo si la T. de Fourier es a valores reales:
Para $s < 0$ tenemos que $\hat{f}(s) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{s}$

Entonces según lo demostrado anteriormente, para $s > 0$ se tiene que $\hat{f}(s) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-s}$.

Esto implica que para cualquier $s \neq 0$ $\hat{f}(s) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|s|}$, claramente una función par El caso $s = 0$ debe estudiarse siempre y por separado.
Ahora demos un ejemplo cuando la T. de Fourier es un complejo:
Si para $s < 0$ tenemos que $\hat{f}(s) = i\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{s}$, entonces para $s > 0$ se tiene que $\hat{f}(s) = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-s}$.
Es equivalente a lo anterior si primero obtenemos la de T. de Fourier por definición para $s > 0$ y luego aplicamos la propiedad para saber que sucede si $s < 0$. En la mayoría de los casos es conveniente primero analizar el caso $s < 0$, porque se puede usar el Teorema de Residuos; a partir de este, podemos obtener $s > 0$.
Habiendo calculado todos los casos; en general podemos obtener una fórmula cerrada para la transformada (manejando un poco el valor absoluto, este es el caso de la Transformada a valores reales); pero si no se pudiese, la manera en que se puede expresar es con corchete {, teniendo cuidado con el caso $s = 0$.
Ahora demos algunos ejemplos que salen en la Tabla:

(i) Primero veamos una Transformada a valores complejos

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Si para $s < 0$

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1 + is}$$

Entonces para $s > 0$

$$\hat{f}(-s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1 - is}$$

$$\overline{\hat{f}(-s)} = \overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{1-is}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\overline{1-is}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{1+is}$$

(ii) Ahora veamos una Transformada a valores reales y verifiquemos que es par

$$f(x) = \begin{cases} k & |x| \leq a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

Si para $s < 0$ obtuvimos

$$\hat{f}(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}k\frac{sen(as)}{s}$$

Entonces para $s > 0$ se tendrá que

$$\hat{f}(s) = \overline{\hat{f}(-s)} = \overline{\sqrt{\frac{2}{\pi}}k\frac{sen(-as)}{-s}} = \overline{-\sqrt{\frac{2}{\pi}}k\frac{sen(as)}{-s}} = \overline{\sqrt{\frac{2}{\pi}}k\frac{sen(as)}{s}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}k\frac{sen(as)}{s}$$

Esto resulta gracias a que la Transformada es a valores reales, por ende un función par.

El resto de los ejemplos en la Tabla son equivalentes, en cuanto a procedimiento, a (ii); ya que las T. de Fourier son a valores reales, y se ven claramente que son funciones pares.