**EJERCICIO 1 - CALCULO AVANZADO Y APLICACIONES, 2009/2**

Profesor: Felipe Álvarez
Auxiliares: Francisco Collarte, Alfredo Torrico

**P1.** Demuestre que la función $f(x) = \cos(x)$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, admite el siguiente desarrollo en serie:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi} \left( \frac{n}{4n^2 - 1} \right) \operatorname{sen}(2nx)$$

**Indicación:** Extienda $f$ a todo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ de forma adecuada. Además puede serle útil recordar que

$$2\cos(a)\operatorname{sen}(b) = \operatorname{sen}(a+b) - \operatorname{sen}(a-b)$$

$$2\cos(a)\cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b)$$

<u>*Bonus*</u>: Usando lo anterior, pruebe que:

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{16} = \frac{1}{2^2-1} - \frac{3}{6^2-1} + \frac{5}{10^2-1} - \frac{7}{14^2-1} + \ldots$$

**P2.**

(a) Dado $a > 0$, muestre calculando la transformada de Fourier por definición que para la siguiente función

$$f(x) = \frac{a}{a^2 + x^2}$$

se tiene que

$$\hat{f}(s) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-a|s|}$$

(b) Considere la familia de funciones $\hat{\phi}_n$ dadas por:

$$\hat{\phi}_n(s) = \begin{cases} 0 & |s| > s_0 \\ 2s_0^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{-ins\pi}{s_0}} & |s| \leq s_0 \end{cases}$$

Demuestre que la transformada inversa para cada una de estas funciones está dada por:

$$\phi_n(x) = \frac{\sqrt{2s_0}}{2\pi} \frac{\sin(s_0 x - n\pi)}{s_0 x - n\pi}$$

<u>*Bonus*</u>: Demuestre que $\{\hat{\phi}_n(s)\}$ es una familia de funciones ortonormales, es decir, que el producto interno para funciones complejas entre $\hat{\phi}_n(s)$ y $\hat{\phi}_m(s)$ es cero si $n \neq m$ y que es 1 si $n = m$.

**Tiempo: 1:15**