

EJERCICIO 1 - CALCULO AVANZADO Y APLICACIONES, 2009/2

Profesor: Felipe Álvarez

Auxiliares: Francisco Collarte, Alfredo Torrico

P1. Demuestre que la función $f(x) = \cos(x)$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, admite el siguiente desarrollo en serie:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi} \left(\frac{n}{4n^2 - 1} \right) \sin(2nx)$$

Indicación: Extienda f a todo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ de forma adecuada. Además puede serle útil recordar que

$$2 \cos(a) \sin(b) = \sin(a+b) - \sin(a-b)$$

$$2 \cos(a) \cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b)$$

Bonus: Usando lo anterior, pruebe que:

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{16} = \frac{1}{2^2 - 1} - \frac{3}{6^2 - 1} + \frac{5}{10^2 - 1} - \frac{7}{14^2 - 1} + \dots$$

Solución: Notemos primero que si queremos tener un desarrollo impar (con funciones senos) entonces debemos extender la función f de manera impar, esto es,

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) & x \in [0, \frac{\pi}{2}) \\ -\cos(x) & x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \end{cases}$$

De este modo, podemos calcular los coeficientes de Fourier. Notamos primero que todos los a_n son nulos pues la función extendida de esta forma es impar, por lo tanto los únicos términos relevantes son los b_n . Así, tomando $l = \frac{\pi}{2}$,

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin\left(x \frac{n\pi}{2}\right) dx = \frac{2}{\pi} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 -\cos(x) \sin(2nx) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \sin(2nx) dx \right)$$

En la primera integral del lado derecho, haciendo un cambio de variables y luego usando la indicación, llegamos a que:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos(x) \sin(2nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x + 2nx) - \sin(x - 2nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n-1} \right] = \frac{2}{\pi} \frac{4n}{4n^2 - 1} \end{aligned}$$

Así, hemos concluido que $b_n = \frac{8}{\pi} \frac{n}{4n^2 - 1}$, lo que implica que:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi} \left(\frac{n}{4n^2 - 1} \right) \sin(2nx)$$

Bonus: Para probar el bonus, basta con ver que la función f es continua y diferenciable en $(0, \frac{\pi}{2})$ y por lo tanto se tiene convergencia puntual, en particular evaluando en $\frac{\pi}{4}$, se tiene que $\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, además el término general de la serie es $\sin(\frac{n\pi}{2})$, que vale 0 para n par, vale 1 para $n = 1, 5, 9, \dots$ y vale -1 para $n = 3, 7, 11, \dots$, de este modo, y notando que $4n^2 = (2n)^2$ obtendremos:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\pi} \left(\frac{1}{2^2 - 1} - \frac{3}{6^2 - 1} + \frac{5}{10^2 - 1} - \frac{7}{14^2 - 1} + \dots \right)$$

Lo cual concluye el problema.

P2.

- (a) Dado $a > 0$, muestre calculando la transformada de Fourier por definición que para la siguiente función

$$f(x) = \frac{a}{a^2 + x^2}$$

se tiene que

$$\hat{f}(s) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-a|s|}$$

- (b) Considere la familia de funciones $\hat{\phi}_n$ dadas por:

$$\hat{\phi}_n(s) = \begin{cases} 0 & |s| > s_0 \\ 2s_0^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{-ins\pi}{s_0}} & |s| \leq s_0 \end{cases}$$

Demuestre que la transformada inversa para cada una de estas funciones está dada por:

$$\phi_n(x) = \frac{\sqrt{2s_0}}{2\pi} \frac{\sin(s_0 x - n\pi)}{s_0 x - n\pi}$$

Bonus: Demuestre que $\{\hat{\phi}_n(s)\}$ es una familia de funciones ortonormales, es decir, que el producto interno para funciones complejas entre $\hat{\phi}_n(s)$ y $\hat{\phi}_m(s)$ es cero si $n \neq m$ y que es 1 si $n = m$.

Solución:

- (a) Reemplazando directamente en la fórmula de la Transformada de Fourier de una función se tiene que, dado $a > 0$:

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-isy} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{a^2 + y^2} e^{-isy} dy$$

Aquí tenemos que separarlo en dos casos:

Primero lo haremos para $s < 0$. En este caso se dan todas las condiciones para resolverlo con Teorema de Residuos. Por lo tanto se tienen dos polos, ai y $-ai$ pero sólo consideramos el que tiene $Im(z) > 0$, entonces el residuo será:

$$Res(f; ai) = \frac{e^{as}}{2ai}$$

El valor de la integral cuando $s < 0$ es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{a^2 + y^2} e^{-isy} dy = 2ai\pi \frac{e^{as}}{2ai} = \pi e^{as} \hat{f}(s) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{as}$$

Para $s > 0$ hacemos un cambio de variable $u = -y$ y nos queda:

$$\int_{\infty}^{-\infty} \frac{a}{a^2 + u^2} e^{isu} (-du) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{a^2 + u^2} e^{isu} (du)$$

Para esto tenemos los mismos polos por lo que el residuo será parecido, sólo nos cambió la exponencial:

$$Res(f; ai) = \frac{e^{-as}}{2ai}$$

De este modo,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{a^2 + u^2} e^{isu} (du) = 2ai\pi \frac{e^{-as}}{2ai} = \pi e^{-as} \hat{f}(s) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-as}$$

Para $s > 0$ se tiene $\hat{f}(s) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-as}$ Y para $s < 0$ se tiene $\hat{f}(s) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{as}$. Se tiene que para cualquier $s \in \mathbb{R}$ tenemos que:

$$\hat{f}(s) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-a|s|}$$

(b) Ocupando la definición de la Transformada Inversa de Fourier tenemos que:

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} \hat{\phi}_n(s) ds$$

pero como nos definen la función $\hat{\phi}_n(s)$ nos queda la integral como

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{s_0\pi}} \int_{-s_0}^{s_0} e^{isx} e^{\frac{-ins\pi}{s_0}}(s) ds &= \frac{1}{2\sqrt{s_0\pi}} \int_{-s_0}^{s_0} e^{\frac{is(s_0x-n\pi)}{s_0}}(s) ds \\ &= \frac{s_0}{2\sqrt{s_0\pi}} \frac{(e^{i(s_0x-n\pi)} - e^{-i(s_0x-n\pi)})}{i(s_0x-n\pi)} = \sqrt{\frac{s_0}{\pi}} \frac{\text{sen}(s_0x-n\pi)}{(s_0x-n\pi)} \end{aligned}$$

que es justamente lo que nos pedían (ojo que fueron reparadas las constantes).

Bonus: Directamente de la definición de producto interno entre funciones tenemos que:

$$\langle \hat{\phi}_n(s), \hat{\phi}_m(s) \rangle = \int_{-s_0}^{s_0} \hat{\phi}_n \bar{\hat{\phi}}_m ds = \frac{1}{2s_0} \int_{-s_0}^{s_0} e^{\frac{-ins\pi}{s_0}} e^{\frac{ims\pi}{s_0}} ds = \frac{1}{2s_0} \int_{-s_0}^{s_0} e^{\frac{i(m-n)s\pi}{s_0}} ds$$

Así, si $m = n$ nos queda que

$$\langle \hat{\phi}_n(s), \hat{\phi}_m(s) \rangle = \frac{1}{2s_0} \int_{-s_0}^{s_0} ds = 1$$

Por otro lado, si $m \neq n$, nos queda:

$$\langle \hat{\phi}_n(s), \hat{\phi}_m(s) \rangle = \frac{1}{2s_0} \frac{(e^{is_0(m-n)\pi} - e^{-is_0(m-n)\pi})}{i(m-n)\pi} = \frac{1}{s_0} \frac{\text{sen}(s_0(m-n)\pi)}{(m-n)\pi}$$

pero $\text{sen}(s_0(m-n)\pi) = 0$ para cualquier par m y n de enteros, luego el producto interno es 0. De aquí se sigue que la familia es ortonormal.