Guía de Problemas Resueltos Variable Compleja

Problema 1. Sea $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}$, sea f una función holomorfa en $A = \{z \in \mathbb{C} \colon 0 < |z| < 2\}$ tal que

$$\int_\Gamma z^n f(z) dz = 0$$

para todo $n \geq 0$. Pruebe que $z = 0$ es una singularidad evitable de f.

Solución:

Como f es holomorfa en $A = \{z \in \mathbb{C} \colon 0 < |z| < 2\}$, entonces f admite una serie de Laurent en torno al cero, es decir existen $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ tales que

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k, \quad \forall z \in A$$

donde

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(0,r)} \frac{f(w)}{w^{k+1}} dw$$

luego si $k < 0$,

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(0,r)} \frac{f(w)}{w^{k+1}} dw = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(0,r)} w^{-k-1} f(w) dw$$

pero $k < 0$ implica que $-k - 1 \geq 0$ y usando la hipótesis se obtiene que

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(0,r)} w^{-k-1} f(w) dw = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(0,r)} 0 dw = 0$$

así $c_k = 0$ para todo $k < 0$ y

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \quad \forall z \in A$$

Así podemos definir $f(0) = \lim_{z\to 0} f(z) = c_0$, es decir, $z = 0$ es una singularidad evitable de f.

Problema 2. Sea f analítica en Ω, con $D(a, R) = \{z \in \mathbb{C} \colon |z - a| \leq R\} \subseteq \Omega$. Supongamos que $f(z)$ tiene un sólo cero $z_0$en $D(a, R)$. Demuestre que

$$z_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(a,R)} \frac{z f'(z)}{f(z)} dz$$

Indicación: Considere $f(z) = (z - z_0)\varphi(z)$.

Solución: Puesto que $f(z)$ tiene un sólo cero z_0 en Ω, $f(z)$ se puede escribir como:

$$f(z) = (z - z_0)\varphi(z) \quad \forall z \in \Omega$$

donde $\varphi(z)$ es una función analítica y tal que $\varphi(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$, luego

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D(a,R)} \frac{z f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D(a,R)} \frac{z}{(z - z_0)} dz + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D(a,R)} \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} dz$$

como $\varphi(z)$ es analítica y no se anula en Ω, se tiene que $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ es analítica en Ω y así por el teorema de Cauchy-Goursat

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D(a,R)}\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}dz=0$$

por otro lado por la formula de Cauchy aplicado a la función $g(z)=z$, se obtiene que

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D(a,R)}\frac{z}{(z-z_0)}dz=z_0$$

de donde se concluye que

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D(a,R)}\frac{zf'(z)}{f(z)}dz=z_0$$

Problema 3. Encontrar la serie de Laurent de la función indicada en el anillo indicado:

1. $\frac{1}{z^2+9}$ en $\{z\in\mathbb{C}\colon |z-4|<5\}$,
2. $\frac{1}{z^2+9}$ en $\{z\in\mathbb{C}\colon |z-4|>5\}$,
3. $e^z+e^{\frac{1}{z}}$ en $\{z\in\mathbb{C}\colon |z|>0\}$.

Solución:

1. En este caso, lo conveniente es desarrollar en fracciones parciales.

$$\frac{1}{z^2+9}=\frac{A}{z+3i}+\frac{B}{z-3i}=\frac{A(z-3i)+B(z+3i)}{z^2+9}$$

evaluando en $z=3i$ y en $z=-3i$, obtenemos que $A=\frac{-1}{6i}$ y $B=\frac{1}{6i}$. por lo tanto

$$\frac{1}{z^2+9}=\frac{-1}{6i}\frac{1}{z+3i}+\frac{1}{6i}\frac{1}{z-3i}$$

pero

$$\frac{1}{z+3i}=\frac{1}{z-4+4+3i}=\frac{1}{4+3i}\frac{1}{(1-\frac{-(z-4)}{4+3i})}=\frac{1}{4+3i}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(z-4)^k}{(4+3i)^k}$$

donde lo anterior es válido si

$$|\frac{(z-4)}{4+3i}|<1 \quad \text{ssi} \quad |z-4|<|4+3i|=5$$

análogamente

$$\frac{1}{z-3i}=\frac{1}{z-4+4-3i}=\frac{1}{4-3i}\frac{1}{(1-\frac{-(z-4)}{4-3i})}=\frac{1}{4-3i}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(z-4)^k}{(4-3i)^k}$$

donde lo anterior vale si

$$|\frac{(z-4)}{4-3i}|<1 \quad \text{ssi} \quad |z-4|<|4-3i|=5$$

luego el desarrollo en serie de Laurent es:

$$\frac{1}{z^2+9} = \frac{-1}{6i}\frac{1}{4+3i}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(z-4)^k}{(4-3i)^k} + \frac{1}{6i}\frac{1}{4-3i}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(z-4)^k}{(4-3i)^k} \quad \text{si} \quad |\text{z-4}|<5.$$

2. de la parte anterior

$$\frac{1}{z^2+9} = \frac{-1}{6i}\frac{1}{z+3i} + \frac{1}{6i}\frac{1}{z-3i}$$

pero

$$\frac{1}{z+3i} = \frac{1}{z-4+4+3i} = \frac{1}{z-4}\frac{1}{1-[\frac{-(4+3i)}{z-4}]} = \frac{1}{z-4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(4+3i)^k}{(z-4)^k}$$

donde lo anterior vale si

$$|\frac{4+3i}{z-4}|<1 \quad \text{ssi} \quad 5=|4+3i|<|z-4|$$

análogamente

$$\frac{1}{z-3i} = \frac{1}{z-4+4-3i} = \frac{1}{z-4}\frac{1}{1-[\frac{-(4-3i)}{z-4}]} = \frac{1}{z-4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(4-3i)^k}{(z-4)^k}$$

donde lo anterior vale si

$$|\frac{4-3i}{z-4}|<1 \quad \text{ssi} \quad 5=|4-3i|<|z-4|$$

luego el desarrollo en serie de Laurent es:

$$\frac{1}{z^2+9} = \frac{-1}{6i}\frac{1}{z-4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(4+3i)^k}{(z-4)^k} + \frac{1}{6i}\frac{1}{z-4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(4-3i)^k}{(z-4)^k} \quad \text{si} \quad 5<|z-4|$$

3. Sabemos que

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}z^k \quad \forall z\in\mathbb{C}$$

luego, el desarrollo en serie de Laurent es:

$$e^z + e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}z^k + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(\frac{1}{z})^k \quad z\neq 0$$

Problema 4.

Calcular

$$\int\limits_{|z|=1}\sin(\frac{1}{z})dz$$

Solución:

Usando el teorema de los residuos, puesto que $z=0$ es una singularidad, se tiene que

$$\int\limits_{|z|=1}\sin(\frac{1}{z})dz = 2\pi i\text{Res}(\sin(\frac{1}{z}),0)$$

como

$$\sin(\frac{1}{z}) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(\frac{1}{z})^{(2k+1)} = \frac{1}{z} + \frac{-1}{3!}\frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!}\frac{1}{z^5}\cdots$$

y el coeficiente asociado a la potencia $\frac{1}{z}$es 1, se tiene que;

$$\text{Res}(\sin(\frac{1}{z}), 0) = 1$$

así

$$\int\limits_{|z|=1} \sin(\frac{1}{z})dz = 2\pi i$$

para la otra integral, usamos que

$$z^3 \sin(\frac{1}{z}) = z^3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(\frac{1}{z})^{(2k+1)} = \frac{z^3}{z} + \frac{-1}{3!}\frac{z^3}{z^3} + \frac{1}{5!}\frac{z^3}{z^5}\cdots$$

luego el coeficiente asociado a la potencia $\frac{1}{z}$es 0, por lo tanto

$$\text{Res}(z^3\sin(\frac{1}{z}), 0) = 0$$

y así[1]

$$\int\limits_{|z|=1} z^3\sin(\frac{1}{z})dz = 0$$

Problema 5

Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una función continua, y definamos $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ por $h(z) = \int_0^1 f(t)cos(zt)dt$. El objetivo de este problema es demostrar que f es entera, es decir, analítica en todo el plano complejo. Para ello:

i) Expanda en serie de potencias la función $cos(z)$ en torno al cero.

ii) Pruebe que $\forall z \in \mathbb{C}, h(z) = \sum_{n\geq 0}[\frac{(-1)^n}{(2n)!}\int_0^1 t^{2n}f(t)dt]z^{2n}$.

iii) Muestre que $\exists c \in \mathbb{R}$ tq $|\int_0^1 t^{2n}f(t)dt| \leq c, \forall n \in \mathbb{N}$. *Hint: Note que* $t^{n+1} \leq t^n$*, pues* $t \in [0, 1]$.

iv) Concluya.

Solución

i) Recordamos que $cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$. Pero $e^{iz} = \sum_{n\geq 0}(iz)^n/n!, e^{-iz} = \sum_{n\geq 0}(-iz)^n/n!$. Como sumaremos ambas expresiones, notemos que en los términos impares $(-iz)^{2n+1}/(2n+1)! = -(iz)^{2n+1}/(2n+1)!$, luego se cancelan los términos impares de una suma con la otra. Así cos(z)= $\frac{1}{2}[\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n)!}[i^{2n}(z)^{2n} + (-1)^{2n}i^{2n}(z)^{2n}]] = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$.[2] *ii)* Reemplazamos lo obtenido en la parte *i)*. Así, $h(z) = \int_0^1 f(t)cos(zt)dt = \int_0^1 f(t)\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n(zt)^{2n}}{(2n)!}$. Pero sabemos que la serie de potencias converge uniformemente, lo que nos permite intercambiar la suma con la integral, y así obtener $h(z) = \sum_{n\geq 0}\int_0^1 f(t)(-1)^n z^{2n}t^{2n}\frac{1}{(2n)!} = \sum_{n\geq 0}[\frac{(-1)^n}{(2n)!}\int_0^1 t^{2n}f(t)dt]z^{2n}$.
iii) Con el hint, inductivamente notamos que $t^{2n} \leq 1, \forall t, n$. Luego $|\int_0^1 t^{2n}f(t)dt| \leq \int_0^1 |t^{2n}f(t)|dt \leq \int_0^1 f(t)dt = c$ (donde c existe y es finita, pues f es continua).
iv) De la parte *ii)* concluimos que h tiene admite una expresión en serie de potencias en torno al cero, lo que nos asegura que es analítica en un disco $D(0, R)$, donde R es el radio de convergencia de la serie. Así, basta con probar que este radio de convergencia es infinito, y con ello tendremos que la convergencia es en todo el plano complejo, y la función sera entera. Recordemos entonces que el radio de convergencia se calcula como $\frac{1}{R} = limsup_{n\to\infty}(|a_n|)^{1/n}$, donde a_n son los coeficientes de la serie. En este caso, $|a_{2n}| = |[\frac{(-1)^n}{(2n)!}\int_0^1 t^{2n}f(t)dt]| =\leq c\frac{1}{(2n)!}$ (por la parte *iii)*. Además $|a_{2n+1}| = 0$. Luego, $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq c|b_n|$, donde

[1] también se puede argumentar que $z = 0$ es una singularidad reparable de $z^3\sin(\frac{1}{z})$ y a posteriori holomorfa en $|z| \leq 1$, luego $\int\limits_{|z|=1} z^3\sin(\frac{1}{z})dz = 0$ por el teorema de Cauchy-Goursat.

[2] También se podría haber resuelto calculando sus derivadas y expresando su desarrollo en serie de Taylor, pues la función coseno sabemos que es analítica

$|b_n|$ son los coeficientes del desarrollo en serie de potencias del coseno. Pero $limsup_{n\to\infty}(|b_n|)^{1/n} = 0$ (pues el radio de convergencia del coseno es infinito) $\Rightarrow limsup_{n\to\infty}(|a_n|)^{1/n} = 0 \Rightarrow R = \infty$,[3]que es lo que queríamos probar.

Problema 6

Obtenga la expresión en serie de potencias para la función $f(z) = \frac{1}{2}ln(1+z^2)$ y determine su radio de convergencia:

Solución

La idea es calcular la serie de la derivada (pues nos quedará una especie de geométrica), y después rigurosamente volver a la primitiva. Así, tenemos que $f'(z) = \frac{z}{1+z^2} = z\sum_{n\geq 0}(z^2)^n = z\sum_{n\geq 0} z^{2n} = \sum_{n\geq 0} z^{2n+1}$. Definamos entonces $h(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2n+2} z^{2n+2}$ (que "debería" ser la primitiva). Pero entonces $h'(z) = \sum_{n\geq 0} z^{2n+1}$ (pues sabemos que las series de potencias se derivan término a término) $\Rightarrow f'(z) = h'(z) \forall z \in D(0, R)$, donde R es el radio de convergencia de la función $\Rightarrow f = h + cte$. Evaluando en cero resulta $f(0) = 0 = h(0) \Rightarrow cte = 0 \Rightarrow f = h$, y luego la representación en serie de potencias de f está dada por $f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n+2}}{2n+2}$. Para calcular el radio de convergencia, notamos que si llamamos a_n al coeficiente que acompaña al z^n, tenemos dos subsucesiones, dadas por $a_{2n} = \frac{1}{2n+2}$,$a_{2n+1} = 0$ (salvo para *n=0,* pues $a_0 = 0$, pero como nos interesan los límites no es algo relevante). Luego claramente $limsup_{n\to\infty}|a_n|^{1/n} = lim_{n\to\infty}|a_{2n}|^{1/2n} = lim(\frac{1}{2n+2})^{1/2n} = 1$(es un límite conocido). Luego $R = \frac{1}{1} = 1$.

Problema 7

Sea $\lambda \in \mathbb{C}$, definamos la función $p^\lambda : \mathbb{C}/\{0\} \to \mathbb{C}$, dada por $p^\lambda(z) = e^{\lambda ln(z)}$ (donde se considera la rama principal del logaritmo)

i) Pruebe que $p^i(i) = e^{-\pi/2}$ y que $\forall k \in \mathbb{N}, p^k(z) = z^k$.

ii) Dado $\lambda = a + ib$, pruebe que $\forall t \in \mathbb{R}, t > 0$, $p^\lambda(t) = t^a[cos(b \cdot log(t)) + isin(b \cdot log(t))]$

iii) Dados $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, verifique que $p^{\lambda+\mu}(z) = p^\lambda(z) \cdot p^\mu(z)$. Encuentre además el dominio donde p^λ es analítica y pruebe que allí $(p^\lambda)'(z) = \lambda p^{\lambda-1}(z)$.

Nota: Todo lo anterior justifica que la función p^λ se le considere la "potencia generalizada" y que se note simplemente $p^\lambda(z) = z^\lambda$.

Solución

i) Por definición, $p^i(i) = e^{i\cdot ln(i)}$. Pero $ln(i) = ln|i| + iarg(i) = 0 + i\frac{pi}{2} \Rightarrow p^i(i) = e^{i\cdot i\cdot \pi/2} = e^{-\pi/2}$. Asimismo, para $k \in \mathbb{N}$, tendremos que $p^k(z) = e^{kln(z)} = e^{ln(z)+...+ln(z)} = \Pi_{j=1}^k e^{ln(z)} = \Pi_{j=1}^k z = z^k$.
ii) $p^\lambda(t) = e^{(a+ib)ln(t)} = e^{aln(t)}e^{ibln(t)} = e^{ln(t^a)}e^{iln(t^b)}$(pues *a,b,t* son reales, con t positivo) $= t^a[cos(b\cdot ln(t) + isin(b \cdot ln(t))]$
iii) Lo primero es directo de la definición. Para la diferenciabilidad, notemos que $\forall z \in \Omega = \mathbb{C}\setminus(-\infty, 0], p^\lambda(z)$ es composición de funciones holomorfas, por lo que p^λ es holomorfa en Ω. Sin embargo, p^λ no es siquiera continua en $(-\infty, 0)$, menos sera diferenciable. Así, el dominio donde p^λ es analítica es Ω. Por último,$p'_\lambda(z) = e^{\lambda ln(z)}\lambda\frac{1}{z} = \lambda e^{\lambda ln(z)}e^{ln(1/z)} = \lambda e^{\lambda ln(z)}e^{\ln|1/z|+iarg(1/z)} = \lambda e^{\lambda ln(z)}e^{-ln|z|-iarg(z)} = \lambda e^{\lambda ln(z)}e^{-ln(z)} = \lambda e^{(\lambda-1)ln(z)} = \lambda p^{\lambda-1}(z)$.

Problema 8

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ analítica no idénticamente cero, $p \in \Omega$ tq $f(p) = 0$. Pruebe que $\exists r > 0, m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ y $Q : D(p, r) \to \mathbb{C}$ analítica tq $D(p, r) \subseteq \Omega$, $Q(p) \neq 0$ y $f(z) = (z-p)^m Q(z) \forall z \in D(p, r)$. Deduzca que p es polo simple de $g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$, y que $Res(g, p) = m$.

[3]Utilizando la cota de la parte *iii)*, se puede calcular directamente que el radio de convergencia es infinito, pero siempre es bueno tener en mente las expresiones conocidas, pues así se ahorra tiempo

Solución

Como f es analítica, sabemos que admite desarrollo en serie de potencias en un disco en torno a p, es decir, existe $r>0$ tq $\forall z \in D(p,r),\ f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z-p)^n$. Notemos que $a_0 = f(p) = 0$. Como f no es la función cero, tenemos que necesariamente $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $a_N \neq 0$. Sea m el primer natural tq $a_m \neq 0$. Dado que $a_0 = 0$, tendremos que $m \geq 1$. Entonces tenemos que en su disco de convergencia, $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z-p)^n = \sum_{n\geq m} a_n(z-p)^n = \sum_{n\geq 0} a_{n+m}(z-p)^{n+m} = (z-p)^m \sum_{n\geq 0} a_{n+m}(z-p)^n$. Definamos entonces $Q(z) = \sum_{n\geq 0} a_{n+m}(z-p)^n$. Con esto Q resulta analítica, y además $Q(p) = a_m \neq 0$.

Por último, notemos que $g(z) = \frac{m(z-p)^{m-1}Q(z)+(z-p)^m Q'(z)}{(z-p)^m Q(z)} = \frac{m}{z-p} + \frac{Q'(z)}{Q(z)}$. Notemos que $\frac{Q'(z)}{Q(z)}$ es analítica en torno a p, pues $Q(p) \neq 0$.Claramente además, p es polo simple de la función $\frac{m}{z-p}$. Por último, $Res(g,p) = lim_{z\to p} g(z)(z-p) = lim_{z\to p} m + \frac{Q'(z)(z-p)}{Q(z)} = m$.

Problema 9. Calcule

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{k+\sin\theta} \quad k > 1$$

Solución:

Usamos el siguiente cambio de variables

$$z = e^{i\theta}, \quad z = e^{i\theta} i d\theta$$

de donde

$$\begin{aligned} d\theta &= \tfrac{dz}{iz} \\ \sin\theta &= \tfrac{z-z^{-1}}{2i} \\ \cos\theta &= \tfrac{z+z^{-1}}{2} \end{aligned}$$

así

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{k + \frac{z-z^{-1}}{2i}} = \oint_{|z|=1} \frac{2dz}{z^2+2ikz-1}$$

ahora resolvemos la ecuación $z^2+2ikz-1 = 0$ para ver si el integrando de la derecha tiene polos dentro del disco $|z| \leq 1$.

$$z^2+2ikz-1 = 0 \quad z = i(-k \pm \sqrt{k^2-1})$$

es decir

$$z_1 = i(-k+\sqrt{k^2-1}) \quad z_2 = i(-k-\sqrt{k^2-1})$$

ahora notamos que $z_1 z_2 = -1$, de modo que $|z_1| = \frac{1}{|z_2|}$. Así si una de las raices queda afuera del disco $|z| \leq 1$, la debera estar en su interior. Además es claro que si $k > 1$, $z_2 = i(-k-\sqrt{k^2-1})$ está fuera del disco unitario. Por lo tanto, $z_1$está en el interior y por el teorema de los residuos:

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{2dz}{z^2+2ikz-1} = 2\pi i \text{Res}(\frac{2}{z^2+2ikz-1}, z_1)$$

nos resta calcular este residuo, es fácil ver que $z_1$es un polo simple, luego:

$$\text{Res}(\frac{2}{z^2+2ikz-1}, z_1) = \lim_{z\to z_1} \frac{2(z-z_1)}{(z-z_1)(z-z_2)} = \frac{2}{z_1-z_2} = \frac{1}{i\sqrt{k^2-1}}$$

Finalmente

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{k+\sin\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2-1}}$$

Problema 10. Calcule

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5-4\sin\theta}$$

Solución:

Haciendo las sustituciones

$$\cos 2\theta = \frac{z^2 + z^{-2}}{2}, \qquad \sin\theta = \frac{z - z^{-1}}{2i}, \qquad d\theta = \frac{dz}{iz}$$

tenemos

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{z^2+z^{-2}}{2}}{5 - \frac{2}{i}(z - z^{-1})}(\frac{dz}{iz}) = \oint_{|z|=1} \frac{(z^4+1)dz}{2iz^2[2iz^2 + 5z - 2i]}$$

el integrando tiene un polo de orden 2 en $z = 0$. Resolviendo la ecuación $2iz^2 + 5z - 2i = 0$, vemos que hay polos simples en $i/2$ y $2i$. El polo del punto $2i$ está fuera del circulo $|z| = 1$, por lo que no debemos considerarlo. Así por el teorema de los residuos,

$$I = 2\pi i[\text{Res}(\%, 0) + \text{Res}(\%, \frac{i}{2})]$$

Calculamos el residuo en $z = 0$,

$$\text{Res}(\%, 0) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{2i}\frac{d}{dz}[\frac{z^4+1}{2iz^2 + 5z - 2i}] = \frac{-5}{8}i$$

ahora el residuo en $z = \frac{i}{2}$,

$$\text{Res}(\%, \frac{i}{2}) = \lim_{z\to\frac{i}{2}} \frac{(z^4+1)(z - \frac{i}{2})}{2iz^2[2iz^2 + 5z - 2i]} = \frac{17i}{24}$$

De donde

$$I = 2\pi i(\frac{-5i}{8} + \frac{17i}{24}) = \frac{-\pi}{6}$$

Problema 11

Calcule

$$I = \int_{|z|=2} \frac{e^z dz}{(z^2+1)z^2}$$

Solución:

El integrando se puede escribir como

$$f(z) = \frac{e^z}{(z+i)(z-i)z^2}$$

de donde vemos que $f(z)$ tiene polos simples en $z = \pm i$ y tiene un polo de orden 2 en $z = 0$. Por lo tanto

$$\begin{array}{c}
\text{Res}(f(z), i) = \text{lím}_{z\to i} \frac{(z-i)e^z}{(z+i)(z-i)z^2} = \frac{e^i}{(2i)(-1)} \\
\text{Res}(f(z), -i) = \text{lím}_{z\to i} \frac{(z+i)e^z}{(z+i)(z-i)z^2} = \frac{e^{-i}}{(-2i)(-1)} \\
\text{Res}(f(z), 0) = \text{lím}_{z\to i} \frac{d}{dz}[\frac{z^2 e^z}{(z+i)(z-i)z^2}] = 1
\end{array}$$

usando el teorema de los residuos

$$I = 2\pi i[\text{Res}(f(z), i) + \text{Res}(f(z), -i) + \text{Res}(f(z), 0)] = 2\pi i[\frac{e^i}{(2i)(-1)} + \frac{e^{-i}}{(-2i)(-1)} + 1] = 2\pi i[1 - \sin(1)].$$

Problema 12

Sea Ω un dominio acotado en $\mathbb{C}$ cuyo borde es una curva cerrada simple γ. Sea f una función holomorfa en $\overline{\Omega}$, y suponga que $f(z) \neq 0, \forall z \in \gamma$. Sean $z_1, \ldots, z_k$ los ceros de $f(z)$ en Ω, con n_j el orden del cero de f en $z_j, \forall j = 1, \ldots, k$.

a) Utilice la fórmula integral de Cauchy para probar que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^{k} n_j.$$

b) Suponga ahora que f tiene un solo cero z_1 en Ω con multiplicidad $n_1 = 1$. Encuentre la integral sobre γ tal que su valor sea z_1.

Solución

a) Podemos describir a f como:

$$f(z) = (z - z_1)^{n_1}(z - z_2)^{n_2} \cdots (z - z_k)^{n_k} g(z)$$

donde $g(z) \neq 0, \forall z \in \Omega$. Luego,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n_1}{z - z_1} + \frac{n_2}{z - z_2} + \cdots + \frac{n_k}{z - z_k} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Así,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{n_j}{z - z_j} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)} dz.$$

Dado que $g(z) \neq 0, \forall z \in \Omega$, $g'(z)/g(z)$ es analítica en Ω. Luego,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)} dz = 0.$$

Por otro lado, aplicando la fórmula de Cauchy a la función $h(z) \equiv 1$ sobre γ

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{n_j}{z - z_j} dz = n_j \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - z_j} dz = n_j \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{h(z)}{z - z_j} dz = n_j \cdot h(z_j) = n_j$$

Concluimos que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^{k} n_j.$$

b) Ahora

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z - z_1} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Luego

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \frac{z}{z - z_1} + \frac{zg'(z)}{g(z)},$$

donde $zg'(z)/g(z)$ es analítica en Ω. Entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{zf'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{z}{z - z_1} dz = z_1.$$

Esto último, aplicando la fórmula de Cauchy para $h(z) \equiv z$.

Problema 13

Sea $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Pruebe que para todo par de enteros $n > k \geq 1$,

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{2\pi i} \oint_D \frac{(z+1)^n}{z^{k+1}} dz$$

Usando esto, pruebe que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n} = \sqrt{5}$$

Solución

Tomando $f(z) = (z+1)^n$, se tiene:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_D \frac{(z+1)^n}{z^{k+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_D \frac{f(z)}{(z-0)^{k+1}} dz = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

y

$$f^{(k)}(z) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1))(z+1)^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!}(z+1)^{n-k}.$$

Entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_D \frac{(z+1)^n}{z^{k+1}} dz = \frac{1}{k!} \cdot \frac{n!}{(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Veamos ahora

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_D \frac{(z+1)^{2n}}{z^{n+1}} dz \right] \frac{1}{5^n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_D \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^{2n}}{z^{n+1} 5^n} \right] dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_D \left[\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(z+1)^2}{5z} \right)^n \right] dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_D \left[\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^2+2z+1}{5z} \right)^n \right] dz$$

y dado que $\left| \frac{z^2+2z+1}{5z} \right| = \frac{|z^2+2z+1|}{|5z|} \leq \frac{|z|^2+|2z|+1}{5} = \frac{4}{5} < 1$. Así,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_D \left[\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z^2+2z+1}{5z}} \right] dz = -\frac{5}{2\pi i} \oint_D \frac{dz}{z^2 - 3z + 1}$$

$$= -\frac{5}{2\pi i} \oint_D \frac{dz}{\left(z - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(z - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)}$$

De estos dos puntos, tenemos que uno está dentro de la curva D y otro fuera. $\frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1$ y $\frac{3-\sqrt{5}}{2} < 1$.

Definamos la función $g(z) = \frac{1}{\left(z - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)}$ que es holomorfa en la superficie encerrada por D. Así,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n} = -\frac{5}{2\pi i} \oint_D \frac{dz}{\left(z - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(z - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)} = -5 \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint_D \frac{g(z)}{\left(z - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)} dz$$

$$= -5 \cdot g\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = -5 \cdot \frac{1}{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Problema 14

Determine la serie de Laurent para $3 < |z - 3i| < 5$ de

$$\frac{4}{4z - z^2}.$$

Solución

Notemos que:

$$\frac{4}{4z-z^2}=\frac{4}{z(4-z)}=\frac{1}{z}+\frac{1}{4-z}=\frac{1}{(z-3i)+3i}+\frac{1}{(4-3i)-(z-3i)}$$
$$=\frac{1}{z-3i}\cdot\frac{1}{1-\frac{-3i}{z-3i}}+\frac{1}{4-3i}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-3i}{4-3i}}$$

Dado que $\left|\frac{-3i}{z-3i}\right|=\frac{3}{|z-3i|}<1$ y que $\left|\frac{z-3i}{4-3i}\right|=\frac{|z-3i|}{5}<1$, podemos escribir

$$\frac{1}{1-\frac{-3i}{z-3i}}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-3i}{z-3i}\right)^k$$

$$\frac{1}{1-\frac{z-3i}{4-3i}}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-3i}{4-3i}\right)^k$$

Entonces

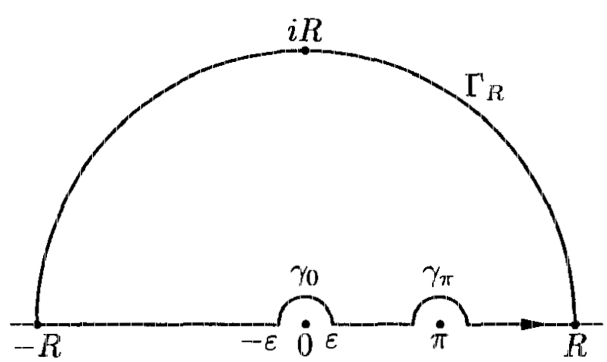
$$\frac{4}{4z-z^2}=\frac{1}{z-3i}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-3i}{z-3i}\right)^k+\frac{1}{4-3i}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-3i}{4-3i}\right)^k$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-3i)^k(z-3i)^{-(k+1)}+\sum_{k=0}^{\infty}(4-3i)^{-k-1}(z-3i)^k$$
$$=\sum_{k=-1}^{-\infty}(-3i)^{-k-1}(z-3i)^k+\sum_{k=0}^{\infty}(4-3i)^{-k-1}(z-3i)^k$$

Problema 15 Calcular $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{sinx}{x(x-\pi)}dx$.

Solución Consideremos la función

$$f(z)=\frac{1}{z(z-\pi)}$$

Si tomamos el camino de la figura



tenemos que $\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R}e^{iz}f(z)dz=0$ por el teorema 12.2.11 del apunte, ya que para un $M>0$ suficientemente grande

$$|f(z)|=\left|\frac{1}{z(z-\pi)}\right|\leq\frac{1/2}{|z|^2}$$

donda la última desigualdad vale $\forall z\in H=\{Imz>0\},|z|>M$.

Notemos que los únicos polos de la función $f(z)$ son POLOS REALES SIMPLES: $z = 0$ y $z = \pi$. El mismo teorema 12.2.11 nos dice entonces que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix} f(x)dx = \pi i \left(Res(e^{iz} f(z), 0) + Res(e^{iz} f(z), \pi) \right)$$

Como ambos polos son simples

$$Res(e^{iz} f(z), 0) = \lim_{z \to 0} z \frac{e^{iz}}{z(z-\pi)} = \lim_{z \to 0} \frac{e^{iz}}{(z-\pi)} = \frac{1}{-\pi}$$

$$Res(e^{iz} f(z), \pi) = \lim_{z \to \pi} (z-\pi) \frac{e^{iz}}{z(z-\pi)} = \lim_{z \to \pi} \frac{e^{iz}}{z} = \frac{e^{i\pi}}{\pi} = \frac{-1}{\pi}$$

por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix} f(x)dx = -2i$$

y con esto

$$-2 = Im \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} Im \left\{ e^{ix} f(x) \right\} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{sinx}{z(z-\pi)} dx$$

En conclusión

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{sinx}{x(x-\pi)} dx = -2$$