AUXILIAR # 9

P1. Demuestre que para todo par de enteros $n > k \geq 1$,

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{(z+1)^n}{z^{k+1}} dz$$

donde $\Gamma \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ es cualquier camino cerrado y simple que encierra al origen, y que se recorre en sentido antihorario. Usando lo anterior, pruebe que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n} = \sqrt{5}$$

P2. Considere una función de la forma

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

y asuma que $f(z)$ tiene un polo en $p \in \mathbb{C}$ con $g(z)$ y $h(z)$ funciones holomorfas en una vecindad de p. Suponga que

$$g(p) \neq 0, h(p) = h'(p) = 0, h''(p) \neq 0$$

Verifique que necesariamente $f(z)$ tiene un polo de orden 2 en p y pruebe que:

$$Res(f;p) = \frac{2g'(p)}{h''(p)} - \frac{2g'(p)h'''(p)}{3h''(p)^2}$$

P3. Considere la función de variable compleja $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z(z-z_1)^2(z-z_2)^2}$, donde $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ son dos números complejos, distintos y no nulos.

(a) Identifique los polos de f con sus respectivos órdenes. Pruebe que

$$Res(f;0) = \frac{1}{z_1^2 z_2^2}, \quad Res(f;z_1) = \frac{e^{iz_1}}{z_1(z_1-z_2)^2}\left(i - \frac{3z_1 - z_2}{z_1(z_1-z_2)}\right)$$

(b) Considere los valores $z_1 = 1$ y $z_2 = -5$, y sea Γ_R la circunferencia de radio R, centrada en el origen y con orientación positiva. Calcule la integral $\oint_{\Gamma_R} f(z)dz$ para $R = 1/2$ y $R = 2$.

P4. Calcular las siguientes integrales orientadas positivamente

(a) $\dfrac{1}{2\pi i} \oint_C \dfrac{dz}{sin(\frac{1}{z})}$, donde C es el círculo $|z| = 1/5$.

(b) $\oint_{|z|=1} (e^{2z\pi} + 1)^2 dz$