MA2002 Cálculo Avanzado y Aplicaciones. Semestre 2009-02
Profesor: Felipe Álvarez **Auxiliares:** Alfredo Torrico y Francisco Collarte

Auxiliar 8

Martes 6 de Octubre de 2009

P1. Calcule directamente el valor de las siguientes integrales:

$$\int_{[0,z_0]} Re(z)dz, \int_{|z|=1} Im(z)dz, \int_{|z|=2} \frac{dz}{1+z^2}, \int_{|z|=1} \overline{z}^n dz$$

P2. Sea $\Gamma \subset \mathbb{C}$ un camino cerrado simple recorrido en sentido antihorario y que encierra una región $D \subseteq \mathbb{C}$. Pruebe que:

$$\acute{A}rea(D) = \tfrac{1}{2i} \oint_{\Gamma} \overline{z} dz.$$

P3. *a*) Pruebe que para todo $b \in]-1,1[$ se tiene

$$\int_0^\infty \frac{1-b^2+x^2}{(1-b^2+x^2)^2+4b^2x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

Indicación: Integre $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ en un contorno rectangular adecuado.

b) Si además $b \neq 0$, pruebe que

$$\int_0^\infty \frac{x}{(1-b^2+x^2)^2+4b^2x^2} dx = \frac{1}{4b} \ln\left(\frac{1+b}{1-b}\right)$$

P4. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa.

a) Dado $\theta_0 \in]0, 2\pi[$, pruebe que si

$$\lim_{R\to+\infty} R \int_0^{\theta_0} |f(Re^{i\theta})| d\theta = 0 \ (1)$$

entonces se tiene

$$e^{i\theta_0} \int_0^\infty f(xe^{i\theta_0}) dx = \int_0^\infty f(x) dx.$$

b) Pruebe que $f(z) = \exp(-z^2)$ satisface (1) para todo $\theta_0 \in]0, \pi/4]$.

c) Sabiendo que $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) = \sqrt{\pi}$, calcule el valor de las siguientes integrales impropias:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cos(x^2) dx, \int_0^\infty e^{-x^2} \sin(x^2) dx.$$

Indicación: $\sin(\frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $\cos(\frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.