

AUXILIAR # 7

P1.

- (i) Encuentre el dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ donde la función

$$f(z) = \frac{1}{2i} \log \left(\frac{1+iz}{1-iz} \right)$$

es holomorfa, y demuestre que $\tan(f(z)) = z$, es decir $f(z) = \arctan(z)$.

- (ii) Calcule f' y determine su desarrollo en serie de potencias en torno a $z = 0$, explicitando el radio de convergencia. Deduzca el desarrollo en serie para f en torno a $z = 0$.

P2. Encuentre el desarrollo en serie de potencias $\sum c_k z^k$ en torno a $z_0 = 0$, para la función

$$f(z) = \frac{1}{1-z-z^2}$$

Pruebe además que c_k es la sucesión de Fibonacci $c_0 = c_1 = 1, c_{k+2} = c_{k+1} + c_k$

P3. Determine todos los $z \in \mathbb{C}$ para los cuales la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^{\log(k)}}$$

y todas sus derivadas término a término convergen absolutamente.

P4. Suponga que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ tiene radio de convergencia $R > 0$. Muestre que:

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n z^n}{n!}$$

es entera y que para $0 < r < R$, existe una constante M tal que

$$|h(z)| \leq M e^{|z|/r}$$