AUXILIAR # 6

P1.

- (a) Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$. Pruebe que si f es diferenciable en $z_0 \in \Omega$ (en el sentido complejo) entonces $f'(z_0) = 0$.
- (b) Sean $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto conexo por caminos y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa. Pruebe que si $|f|$ es constante en Ω entonces f también es constante. Indicación: considere $|f|^2$.
- (c) Sean $u, v : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Pruebe que si $u + iv$ y $v + iu$ son holomorfas en Ω como subconjunto de $\mathbb{C}$, entonces $u + iv$ es constante.

P2. Definamos los operadores diferenciales $\frac{\partial}{\partial z}$ y $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ mediante las fórmulas

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)\end{aligned}$$

- (a) Pruebe que $f = u + iv$ satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann si y sólo si $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.
- (b) Si $f \in H(\Omega)$, muestre que $\forall z \in \Omega, f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z)$.
- (c) Explícite en términos de u y v a qué corresponde la ecuación $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$.
- (d) Dada una función $f = u + iv$ con u y v de clase C^2 , se define el laplaciano de f mediante

$$\Delta f = \Delta u + i \Delta v,$$

y si $\Delta f = 0$ en Ω entonces se dice que f es armónica en Ω . Deduzca que si $f \in H(\Omega)$ entonces f es armónica en Ω . Pruebe que $f \in H(\Omega)$ si y sólo si $f(z)$ y $zf(z)$ son armónicas en Ω .

P3. Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Supongamos que en coordenadas cartesianas $z = x + iy$, $f(z) = \hat{u}(x, y) + i\hat{v}(x, y)$, y que en coordenadas polares $z = re^{i\theta}$, $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ con u y v diferenciables. Verifique que $u(r, \theta) = \hat{u}(r \cos \theta, r \sin \theta)$ y $v(r, \theta) = \hat{v}(r \cos \theta, r \sin \theta)$, y pruebe que f es holomorfa en Ω si y sólo si

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r} \end{cases}$$

Estas se conocen como las ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares. Verifique que de tenerse estas condiciones entonces

$$f'(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right) e^{-i\theta}, \quad z = re^{i\theta}.$$