AUXILIAR # 5

P1. Utilice el Teorema de Green en el plano para calcular el área de la región encerrada por la hipocicloide $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$.
Ind: Considere la curva plana parametrizada por $x = 8\cos^3(\theta)$ y $y = 8\,\mathrm{sen}^3(\theta), \theta \in [0, 2\pi]$.

P2. Sea Γ la curva que se obtiene al intersectar la superficie $z = x^2 + y^2$ con la superficie de la esfera unitaria. Considere Γ recorrida en sentido antihorario.

(a) Calcule la integral de trabajo del campo $\vec{F} = (x^2 + z)\hat{\imath} + (y^2 + x)\hat{\jmath} + (z^2 + y)\hat{k}$ a lo largo de Γ.
(b) Sea $\vec{F} = \frac{1}{\rho}\hat{\theta} + z\hat{k}$ (en coordenadas cilíndricas). Pruebe que $rot\vec{F} = \vec{0}$ para $\rho > 0$, pero que sin embargo $\oint_\Gamma \vec{F} d\vec{r} \neq 0$. Explique esta aparente contradicción al Teorema de Stokes.

P3. Sea $\vec{v}$ un campo definido por $\vec{v}(x, y, z) = (z, x, y)$. Considere las siguientes regiones del espacio:

$$\begin{aligned} A_1 &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0, y \geq 0\right\} \\ A_2 &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 2z\right\} \\ H &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = a^2\right\} \end{aligned}$$

(i) Dibuje la curva $\Gamma = (A_1 \cup A_2) \cap H$ y la superficie S que ella define.
(ii) Calcule directamente:

$$\iint_S rot(\vec{v}) \cdot \hat{n} dA$$

(iii) Verifique el resultado anterior mediante el Teorema de Stokes.

P4. Determine cuáles de los siguientes campos son conservativos y encuentre un potencial para aquellos que lo son:

(i) $\vec{F}(x, y, z) = F_1(x)\hat{\imath} + F_2(y)\hat{\jmath} + f_3(z)\hat{k}$
(ii) $\vec{F}(\rho, \theta, z) = a\rho^2 \cos(\theta)\hat{\rho} + a\rho^2 \sin(\theta)\hat{\theta} + 2az^2\hat{k}$
(iii) $\vec{F}(r, \theta, \varphi) = -2ar\cos(\theta)\sin(\varphi)\hat{r} - ar\cos(\theta)\cos(\varphi)\hat{\theta} + ar\sin(\theta)\sin(\varphi)\hat{\varphi}$
(iiii) $\vec{F}(x, y, z) = e^{-ax^2 - by^2 - cz^2}(ax\hat{\imath} + by\hat{\jmath} + cz\hat{k})$
(iiiii) $\vec{F}(\vec{r}) = f(\hat{V} \cdot \vec{r})\vec{V}$ donde $\vec{V} \in \mathbb{R}^3$ es un vector constante, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función escalar apropiada y $\vec{r} = (x, y, z)$.

P5. Considere el campo vectorial conservativo:

$$\vec{G}(x, y, z) = (y^2 \cos(x) + z^3, 2y\sin(x) - 4, 3xz^2 + 2).$$

(i) Encuentre g tal que $\nabla g = \vec{G}$.
(ii) Calcule $\int_C \vec{G} \cdot d\vec{r}$ donde C es la curva

$$\vec{r}(t) = (\sqrt{2\pi - t}\cos(t), \sqrt{2\pi - t}\sin(t), t), \quad t \in [0, 2\pi)$$

P6. Sean $\Omega \subset \Omega'$ dos abiertos acotados en $\mathbb{R}^3$. Suponga que $\partial\Omega$ es una superficie regular por pedazos y sea $u \in C^2(\Omega; \mathbb{R})$ tal que

$$\begin{cases} \Delta u &= f \quad \text{en } \Omega \\ \nabla u \cdot \hat{n} &= g \quad \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

donde $f, g \in C(\Omega'; \mathbb{R})$ y $\hat{n}$ es la normal exterior a Ω. Pruebe que para todo $v \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$

$$\iiint\limits_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dV = \iint\limits_{\partial\Omega} vg dA - \iiint\limits_{\Omega} vf dV$$

Muestre que si $f(x, y, z) = \frac{1}{x}$ y $g \equiv 0$ entonces

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} dV = -Vol(\Omega),$$

donde en este caso Ω no intersecta el plano YZ (de ecuación $x = 0$).