

AUXILIAR # 3

P1. Considere el campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2}\right)$ y sea S la superficie de la elipsoide de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

- (a) Muestre que el vector normal $\hat{n}$ a la superficie S en un punto $(x_0, y_0, z_0) \in S$ es paralelo al campo $\vec{F}$.
- (b) Sea $D(x_0, y_0, z_0)$ la distancia desde el origen al plano tangente a la elipsoide en (x_0, y_0, z_0) . Pruebe que $D = 1/\vec{F} \cdot \hat{n}$ en S .
- (c) Demuestre que

$$\iint_S \frac{1}{D} dA = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \right).$$

Indicación: Recuerde que el volumen de la elipsoide antes descrita es igual a $\frac{4\pi}{3}abc$.

P2. Sea el campo vectorial $\vec{F}(x, y) = (2x + y^2)\hat{i} + (3y - 4x)\hat{j}$. Calcular la integral de trabajo $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ donde Γ es la lenteja formada por las ecuaciones $x = y^2$; $y = x^2$; $x, y \geq 0$, recorrida en sentido antihorario.

P3. Calcule la integral de trabajo $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ para el campo vectorial

$$\vec{F} = (x^2 - yz, y^2 - xz, z^2 - xy)$$

sobre la hélice Γ que une los puntos $P = (1, 0, 0)$ y $Q = (1, 0, 1)$ dando una sola vuelta.

P4. Utilice el teorema de Stokes para calcular la integral de trabajo del campo $\vec{G} = (x - y)\hat{i} + x^2y\hat{j} + zx\hat{k}$ a lo largo del círculo $x^2 + y^2 = 1$ orientado en sentido antihorario.

P5. Considere la región del plano $R = [0, \pi]^2 \subset \mathbb{R}^2$. Se define para $n > 2$ las siguientes funciones

$$\begin{aligned} M_n(x, y) &= xy^{n-1} \cos^n(y) + \ln(1 + x^n) \\ N_n(x, y) &= yx^{n-1} \sin^n(x) + ye^{y^n} \end{aligned}$$

- (a) Calcule $I_n = \int_{\partial R} M_n(x, y)dx + N_n(x, y)dy$.
- (b) Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} I_{2n}$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} I_{2n+1}$.

P6.

- (a) Bosqueje la superficie definida por $z^2 + x^2 = 4 + y^2$, $y \geq 0$. Note que para y fijo, la ecuación anterior representa una circunferencia.
- (b) Bosqueje la curva C obtenida al intersectar la superficie anterior con el cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = 4$.
- (c) Calcule la circulación $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ para el campo (en coordenadas cilíndricas)

$$\vec{F}(\rho, \theta, z) = (\rho \sin \theta + z)\hat{\rho} + \frac{z}{\rho} \sin \theta \hat{\theta} + (z^3 - \rho \cos \theta)\hat{k}.$$