## AUXILIAR # 2

**P1.** Consideremos el sistema de coordenadas dado por $\vec{r}(x,\rho,\theta) = (x, \rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$, con $x \in \mathbb{R}$, $\theta \in [0, 2\pi[$ y $\rho \geq 0$.

(a) Determinar el triedro de vectores unitarios $\hat{x}, \hat{\rho}, \hat{\theta}$. ¿Son ortogonales? Calcule $\hat{\theta} \times \hat{x}, \hat{theta} \times \hat{\rho}$.
(b) Encuentre expresiones para el gradiente, divergencia, laplaciano y rotor en este sistema de coordenadas.
(c) Dada una función no-negativa y diferenciable $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$, bosqueje la superficie de ecuación $y^2 + z^2 = f(x)^2$. Verifique que una parametrización de esta superficie es $\vec{r1}(x,\theta) = x\hat{i} + f(x)\hat{\rho}$

**P2.** Calcular el flujo del campo $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,z)$ a través del disco definido por las ecuaciones $x^2 + y^2 \leq 25$, $z = 12$, y orientado según la normal superior $\hat{k}$.

**P3.** Calcule el flujo del campo $\vec{F}(x,y,z) = (e^z \sin y + xy^2 z, e^x \cos z + x^2 yz, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}})$ a través de la superficie lateral del cilindro de radio 1 que se encuentra entre los planos $z = -1$ y $z = 1$.
**Indicación:** Calcule el flujo total que sale del cilindro (incluyendo las tapas y usando el teorema de la divergencia). Calcule el flujo a través de las tapas directamente.

**P4.** Sea $\vec{F}(x,y,z) = (x + \cos(x+y), y + \cos(x+y), \sqrt{x^2+y^2} + 2z\sin(x+y))$. Calcule el flujo de este campo a través de la superficie de la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \leq 0$, orientada según la normal interior.

**P5.** Sea $\vec{F}$ el campo vectorial dado por

$$\vec{F}(x,y,z) = \left( zx + \sin(x-y), y - \sin(x-y), \sqrt{x^2+y^2} - \frac{1}{2}z^2 - 2z\cos(x-y) \right).$$

Calcule el flujo de $\vec{F}$ a través del casquete semi-esférico (sin tapa) dado por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con $z > 0$. Precise el sentido de orientación escogido para los cálculos.

**P6.** Considere el campo vectorial dado en coordenadas cilíndricas por:

$$\vec{F} = \frac{1}{\rho}\hat{\rho} + e^{-\theta^2}\hat{k}$$

(a) Determine el dominio de diferenciabilidad de $\vec{F}$ y verifique que $div(\vec{F}) = 0$ sobre dicho dominio.
(b) Sea $\Sigma \subset R^3$ la superficie dada por la porción del casquete esférico $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que se encuentra entre los planos $z = -1$ y $z = 1$ (sin considerar las tapas). Bosqueje $\Sigma$ y calcule el flujo de $\vec{F}$ a través de $\Sigma$ orientada según la normal exterior a la esfera.
**Nota:** Puede usar el teorema de la divergencia utilizando un volumen adecuado. En tal caso tenga especial cuidado en verificar las hipótesis del teorema.
(c) Interprete el resultado obtenido en (b).