Auxiliar 10: Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Profesor: Roberto Cominetti
Auxiliares: Roberto Castillo - Mauro Escobar
30 de Octubre de 2009

P1. Sea $f \in \mathcal{C}^1$, 2π-periódica, tal que $\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0$.

(a) Probar la identidad de Parseval, esto es:

$$\int_0^{2\pi} f^2(x)dx = \pi \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2).$$

(b) Deduzca que

$$\int_0^{2\pi} f'^2(x)dx = \pi \sum_{n=1}^{\infty}(n^2 a_n^2 + n^2 b_n^2).$$

(c) Pruebe la desigualdad de Wirtinger:

$$\int_0^{2\pi} f'^2(x)dx \geq \int_0^{2\pi} f^2(x)dx.$$

(d) Pruebe que se da la igualdad en (c) si y sólo si $f(x) = a\cos x + b\sin x$.

P2. (a) Encuentre las series de Fourier de las funciones siguientes en el intervalo que se indica:

$$(i)\ \sin^3 x, \quad -\pi \leq x \leq \pi \qquad\qquad (ii)\ |\sin x|, \quad -\pi < x < \pi.$$

(b) Utilice la parte anterior para calcular

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}.$$

P3. Muestre que $\forall x \in (0, \pi)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

P4. (a) Pruebe que, si $a > 0$, la Transformada de Fourier de

$$f(x) = \frac{a}{a^2 + x^2} \qquad \text{es} \qquad \hat{f}(s) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-a|s|}.$$

(b) Encuentre la Transformada de Fourier de

$$g(x) = \frac{x}{(a^2 + x^2)^2}.$$