Auxiliar 8: Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Profesor: Roberto Cominetti
Auxiliares: Roberto Castillo - Mauro Escobar
16 de Octubre de 2009

P1. A lo largo de esta pregunta f denotará una función holomorfa en todo $\mathbb{C}$.

(a) Demuestre que $f(z) = \alpha z + z_0$, para $\alpha \in \mathbb{R}$ y $z_0 \in \mathbb{C}$ dados, son las únicas funciones holomorfas de la forma $f(z) = u(x) + iv(y)$, donde $z = x + iy$.

(b) Demuestre la equivalencia: Existe un natural $k \in \mathbb{N}$ y dos complejos a y b tales que $|f(z)| \leq a + b|z|^k$ para todo $z \in \mathbb{C}$ ssi f es un polinomio de grado k.
Hint: Utilice las desigualdades de Cauchy.

(c) Suponga que $f(z)/z \longrightarrow 0$ cuando $|z| \longrightarrow +\infty$.

(i) Demuestre que existen $a, b \in \mathbb{C}$ tales que $|f(z)| \leq a + b|z|, \ \forall z \in \mathbb{C}$.

(ii) Utilice la parte (b) para concluir que f es necesariamente constante en todo $\mathbb{C}$.

P2. (a) Encuentre los discos de convergencia para las siguientes series:

(i) $\sum_{n\geq 1} n^{1/n}(z-1)^n$ (ii) $\sum_{n\geq 1} n!(z-i)^{n!}$

(b) Obtenga las series de potencias en torno a $z_0 = 0$ para las siguientes funciones:

(i) $f(z) = \log(1-z^2)$ (ii) $f(z) = \frac{1}{z^3}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$

Indique también la mayor región donde estas expansiones son válidas.

(c) Integre las funciones de la parte (b) sobre la curva $\Gamma = \partial D(0, 1/2)$ que corresponde a la frontera del disco $D(0, 1/2)$, orientada en sentido anti-horario.

P3. (a) Para $a > 1$ y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, calcule las integrales

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(n\theta)}{a - \cos\theta} d\theta \qquad \text{y} \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(n\theta)}{a - \cos\theta} d\theta.$$

(b) Calcule las siguientes integrales impropias:

(i)
$$\int_0^{\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^4 + 5x^2 + 4} dx$$

(ii)
$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + \pi^2)^2} dx.$$

P4. Calcule la integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Para ello considere la integral de la función $f(z) = e^{iz}/z$ sobre algún camino apropiado.

P5. Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa, $f(z) = \exp(-z^2)$.

(a) Dado $\theta_0 \in [0, \pi/4]$, pruebe que $\lim\limits_{R\to\infty} R \int_0^{\theta_0} |f(Re^{i\theta})| d\theta = 0$
Deduzca que

$$e^{i\theta_0} \int_0^{\infty} f(e^{i\theta_0} x) dx = \int_0^{\infty} f(x) dx \ .$$

(b) Sabiendo que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. Calcule

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos(x^2) dx \qquad \text{y} \qquad \int_0^{\infty} e^{-x^2} \sin(x^2) dx.$$