Auxiliar 6: Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Profesor: Roberto Cominetti
Auxiliares: Roberto Castillo - Mauro Escobar
10 de Septiembre de 2009

P1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un abierto acotado de frontera regular a trozos $\partial\Omega$, orientada según la normal exterior. Consideremos un campo escalar ϕ de clase $\mathcal{C}^2$ en un dominio $\mathcal{U} \supset \Omega \cup \partial\Omega$ y supongamos que ϕ es armónico en Ω, es decir, $\Delta\phi = 0$ en Ω. Sea $\vec{p} \in \operatorname{int}(\Omega)$ y definamos la función $\psi(\vec{r}) = 1/\left\|\vec{r} - \vec{p}\right\|$ con $\vec{r} = (x, y, z)$.

(i) Calcule $\nabla\psi(\vec{r})$ para $\vec{r} \neq \vec{p}$. Muestre que $\Delta\psi = 0$ en $\mathbb{R}^3 \backslash \{\vec{p}\}$.

(ii) Sea $B(\vec{p}, \delta) \subset \Omega$ la esfera de centro $\vec{p}$ y radio $\delta > 0$, contenida en Ω. Pruebe que

$$\int\limits_{\partial\Omega} (\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi) \cdot d\vec{S} = \int\limits_{\partial B(\vec{r},\delta)} (\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi) \cdot d\vec{S}.$$

(iii) Muestre que $\lim\limits_{\delta\to 0^+} \int\limits_{\partial B(\vec{p},\delta)} (\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi) \cdot d\vec{S} = -4\pi\phi(\vec{p})$ de donde se concluye que $\phi(\vec{p}) = -\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\partial\Omega} (\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi) \cdot d\vec{S}$. Esto prueba que es posible reconstruir ϕ en Ω a partir del conocimiento de ϕ y su gradiente $\nabla\phi$ en el borde $\partial\Omega$.

P2. (i) Sea $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una función de clase $\mathcal{C}^1$. Demuestre que

$$\vec{\nabla} \times \int_a^b \varphi(\vec{r}, t)dt = \int_a^b \vec{\nabla} \times \varphi(\vec{r}, t)dt.$$

Hint. Utilice la regla de Leibnitz:
Si $\vec{r} = \vec{r}(x, y, z)$, u es una coordenada cartesiana y φ es $\mathcal{C}^1$, entonces

$$\frac{\partial}{\partial u} \int_a^b \varphi(\vec{r}, t)dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial u}\varphi(\vec{r}, t)dt.$$

(ii) Considere el campo vectorial $\vec{F} = g(r)\hat{\theta}$ expresado en coordenadas esféricas, donde $r = \|\vec{r}\|$ y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función escalar. Verifique que $\operatorname{div}(\vec{F}) = 0$ y pruebe que

$$\vec{\nabla} \times (\vec{F}(t\vec{r}) \times t\vec{r}) = 2t\vec{F}(t\vec{r}) + t^2 \frac{d}{dt}\vec{F}(t\vec{r}).$$

(iii) Sea ahora $\vec{F}$ un campo cualquiera tal que $\operatorname{div}(\vec{F}) = 0$ en una bola $B \subset \mathbb{R}^3$ centrada en el origen. Entonces se puede probar que la fórmula probada en (ii) es válida en B. Definamos el campo vectorial

$$\vec{G}(\vec{r}) = \int_0^1 \vec{F}(t\vec{r}) \times t\vec{r}\ dt.$$

Usando lo anterior concluya que $\vec{\nabla} \times \vec{G} = \vec{F}$ en B.