

AUXILIAR 4: CÁLCULO AVANZADO Y APLICACIONES

PROFESOR: ROBERTO COMINETTI
AUXILIARES: ROBERTO CASTILLO - MAURO ESCOBAR
28 DE AGOSTO DE 2009

P2. Considere

$$\vec{F} = (2r \sin \theta - \phi \sin(r\phi))\hat{r} + r \frac{\cos \theta}{\sin \phi} \hat{\theta} + \left(\frac{\cos \phi}{r} - \sin(r\phi)\right)\hat{\phi}.$$

Verifique que $\text{rot} \vec{F} = 0$ y calcule el trabajo de ir desde el punto $(5, 5, 0)$ al punto $(2, 2, 1)$.

SOLUCIÓN:

Buscamos $f = f(r, \theta, \phi)$ tal que $\nabla f = \vec{F}$. Si f existe, se tiene que

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi}.$$

Imponemos que

$$\frac{\partial f}{\partial r} = 2r \sin \theta - \phi \sin(r\phi) \quad (\hat{r})$$

$$\frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial f}{\partial \theta} = r \frac{\cos \theta}{\sin \phi} \quad (\hat{\theta})$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \phi} = \frac{\cos \phi}{r} - \sin(r\phi) \quad (\hat{\phi})$$

Integrando la ecuación $(\hat{r})$ según r , obtenemos:

$$f(r, \theta, \phi) = \int [2r \sin \theta - \phi \sin(r\phi)] dr = r^2 \sin \theta + \cos(r\phi) + c(\theta, \phi),$$

donde $c(\theta, \phi)$ es una función constante para r .

Derivando esta última expresión según θ y multiplicando por $\frac{1}{r \sin \phi}$, se tiene:

$$\frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{1}{r \sin \phi} [r^2 \cos \theta + \frac{\partial}{\partial \theta} c(\theta, \phi)],$$

imponiendo la condición $(\hat{\theta})$:

$$\frac{1}{r \sin \phi} [r^2 \cos \theta + \frac{\partial}{\partial \theta} c(\theta, \phi)] = r \frac{\cos \theta}{\sin \phi}$$

con lo cual

$$\frac{\partial}{\partial \theta} c(\theta, \phi) = 0.$$

Así, $c(\theta, \phi)$ es constante en θ . Luego, $c(\theta, \phi) = c(\phi)$ y

$$f(r, \theta, \phi) = r^2 \sin \theta + \cos(r\phi) + c(\phi),$$

con esto, tenemos que

$$\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \phi} = \frac{1}{r} [-r \sin(r\phi) + \frac{\partial}{\partial \phi} c(\phi)],$$

imponiendo $(\hat{\phi})$:

$$\frac{1}{r} [-r \sin(r\phi) + \frac{\partial}{\partial \phi} c(\phi)] = \frac{\cos \phi}{r} - \sin(r\phi).$$

Luego,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \phi} c(\phi) &= \cos \phi \\ c(\phi) &= \sin \phi + K, \end{aligned}$$

donde K es una constante real.

Con esto

$$f(r, \theta, \phi) = r^2 \sin \theta + \cos(r\phi) + \sin \phi + K.$$

Ahora, para el punto $(5, 5, 0)$ se tiene $r = 5\sqrt{2}$, $\theta = \pi/4$ y $\phi = \pi/2$. Y para el punto $(2, 2, 1)$ se tiene $r = 3$, $\theta = \pi/4$ y $\phi = \arccos(1/3)$.

Así, el trabajo realizado desde $(5, 5, 0)$ a $(2, 2, 1)$ es:

$$f(3, \pi/4, \arccos(1/3)) - f(5\sqrt{2}, \pi/4, \pi/2).$$

Obs: El enunciado original del problema pedía calcular el trabajo desde $(5, 5, 0)$ al punto $(0, 0, 5)$, sin embargo éste último punto no tiene valor para θ único (se encuentra en el eje z), luego el trabajo para realizar esa trayectoria no es único. Esto se debe a que el campo $\vec{F}$ se indefiniría cuando $\sin \phi = 0$, es decir, cuando $\phi = 0$ y $\phi = \pi/2$, correspondiente al eje z . Luego, el trabajo dependerá del ángulo θ con que el camino se acerque al eje z . Podemos concluir que $\vec{F}$ es conservativo en $\mathbb{R}^3 \setminus \text{eje } z$.

Dudas a: mescobar@dim.uchile.cl