Auxiliar 4: Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Profesor: Roberto Cominetti
Auxiliares: Roberto Castillo - Mauro Escobar

28 de Agosto de 2009

P1. Sea $\Omega \in \mathbb{R}^3$ un volumen suave de frontera Σ. Pruebe las fórmulas de Green para $f, g \in C^2(\Omega)$:

(i)
$$\int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g + f\Delta g = \int_{\Sigma} f\nabla g \cdot \hat{n}.$$

(ii)
$$\int_{\Omega} f\Delta g - \int_{\Omega} g\Delta f = \int_{\Sigma} f\nabla g \cdot \hat{n} - \int_{\Sigma} g\nabla f \cdot \hat{n}.$$

P2. Considere
$$\vec{F} = (2r\sin\theta - \phi\sin(r\phi))\hat{r} + r\frac{\cos\theta}{\sin\phi}\hat{\theta} + (\frac{\cos\phi}{r} - \sin(r\phi))\hat{\phi}.$$

Verifique que $\text{rot}\vec{F} = 0$ y calcule el trabajo de ir desde el punto $(5, 5, 0)$ al punto $(2, 2, 1)$.

P3. Calcule el área de encerrada por la hipercicloide $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$.
Hint: considere la curva plana parametrizada por $x = 8\cos^3\theta$ e $y = 8\sin^3\theta$, $\theta \in [0, 2\pi)$.

P4. Considere la superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ formada por los puntos del casquete esférico unitario que están por encima del plano $z = 2y$. Es decir, $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 2y\}$.

(i) Bosqueje S y encuentre una parametrización regular de esta superficie.

(ii) Calcule el flujo del campo
$$\vec{F}(x, y, z) = (x + y^2 + z^2, e^{-x^2} - 2, 2e^{-x^2} + 1)$$
sobre la superficie S orientada con la norma exterior a la esfera.

P5. Sea Γ la curva que se obtiene de intersectar la superficie $z = x^2 + y^2$ con la superficie de la esfera unitaria. Considere Γ recorrida en sentido antihorario. Sea
$$\vec{F} = \frac{1}{\rho}\hat{\theta} + z\hat{k}.$$

Pruebe que $\text{rot}\vec{F} = 0$ para $\rho > 0$, pero que sin embargo $\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} \neq 0$. Explique esta aparente contradicción con el teorema de Stokes.