

AUXILIAR 3: CÁLCULO AVANZADO Y APLICACIONES

PROFESOR: ROBERTO COMINETTI
AUXILIARES: ROBERTO CASTILLO - MAURO ESCOBAR
21 DE AGOSTO DE 2009

P1. Probar que la integral de línea

$$\int_{\overline{PQ}} (x^2 - yz)dx + (y^2 - zx)dy + (z^2 - xy)dz$$

es independiente del camino de integración entre los puntos $P = (1, 1, 1)$ y $Q = (2, 3, 4)$. Halle su valor.

P2. Considere el campo vectorial conservativo

$$\vec{G}(x, y, z) = (y^2 \cos x + z^3, 2y \sin x - 4, 3xz^2 + 2).$$

- (i) Encuentre g tal que $\nabla g = \vec{G}$.
- (ii) Calcule $\int_C \vec{G} \cdot d\vec{r}$ donde C es la curva

$$\vec{r}(t) = (\sqrt{2\pi - t} \cos t, \sqrt{2\pi - t} \sin t, t), \quad t \in [0, 2\pi).$$

P3. Considere el toro de radio mayor R y radio menor a , donde $0 < a < R$ son constantes conocidas. Sea Σ la porción de superficie de dicho toro que se encuentra fuera de la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, la cual orientamos según la norma exterior del toro.

- (i) Demuestre que si $\vec{F}$ es un campo continuamente diferenciable en Σ , entonces se tiene que

$$\iint_{\Sigma} \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \hat{n} dA = \oint_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

donde C_1 y C_2 son las circunferencias obtenidas de la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = d^2$ con los planos $z = z_1$ y $z = z_2$, respectivamente, con $d = \frac{2R^2 - a^2}{2R}$, $z_1 = \frac{a\sqrt{4R^2 - a^2}}{2R}$, $z_2 = -z_1$, ambas orientadas en el sentido contrario a las manecillas del reloj.

- (ii) Considere el campo

$$\vec{F} = \frac{e^{-z^2}}{\rho} \hat{\rho} + \hat{\theta} + \sin \theta \cos^2(z\theta) \hat{k},$$

calcule $\iint_{\Sigma} \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \hat{n} dA$.

P4. Sea $k \geq 2$ entero, definamos la curva en $\mathbb{R}^2$

$$\vec{r}(t) = (ka \cos t - \frac{a}{2} \cos(kt), ka \sin t - \frac{a}{2} \sin(kt)), \quad t \in [0, 2\pi).$$

Pruebe que el área encerrada por la curva es $A = \frac{\pi}{2}(4k + 1)ka^2$.

P5. Calcule el área encerrada por la hipocicloide $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$.

Hint: considere la curva plana parametrizada por $x = 8 \cos^3 \theta$ e $y = 8 \sin^3 \theta$, $\theta \in [0, 2\pi)$.

P6. Considere el campo

$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{x^2 - y}{x^2 + y^2} \hat{i} + \frac{x}{x^2 + y^2 - 2y} \hat{j}.$$

- (i) Indique el dominio de definición de $\vec{F}$ y pruebe que $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ en dicho dominio.
- (ii) Calcule la integral de trabajo $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ a lo largo de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, $z = 2$ recorrida en sentido antihorario. ¿Contradice esto el Teorema de Stokes? Explique.
- (iii) Calcule el trabajo $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ a lo largo de cualquier curva simple C en el plano $z = 0$ y que no pasa por el origen. Distinga según si la curva encierra o no el origen.

P7. Determine los valores de las constantes α , β y γ para que el campo vectorial

$$\vec{F} = (x + 2y + \alpha z)\hat{i} + (\beta x - 3y - z)\hat{j} + (4x + \gamma y + 2z)\hat{k}$$

sea conservativo, en cuyo caso encuentre un potencial de $\vec{F}$.

P8. Sea $\vec{F} = yx^2\hat{i} - xz\hat{j} + 3y\hat{k}$. Considere la superficie S del paraboloide $2x = z^2 + y^2$ para $0 \leq x \leq 2$. Bosqueje S , indique gráficamente una orientación sobre S y evalúe la integral de flujo del rotor de $\vec{F}$ a través de S .

P9. Un ciclista sube una montaña parabólica de ecuación $x^2 + y^2 + z = 2\pi$ siguiendo un camino Γ de modo de alcanzar la cima tras realizar una vuelta en torno a la montaña.

- (i) Utilizando coordenadas cilíndricas, deduzca una parametrización de Γ sabiendo que se satisface $\frac{dz}{d\theta} = a$, con $a > 0$. Suponga que inicialmente el ciclista se encuentra en el punto de coordenadas $(\sqrt{2\pi}, 0, 0)$.

- (ii) Sea

$$\vec{G}(x, y, z) = \left(\frac{y^2}{2}, y(x + z), \frac{y^2}{2}\right).$$

Encuentre un potencial de $\vec{G}$ y calcule el trabajo a lo largo de Γ .

- (iii) Sea

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{y^2}{2}, y(x + z), \frac{-y^2}{2}\right).$$

Calcule el trabajo de $\vec{F}$ a lo largo de Γ .