Auxiliar 1: Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Profesor: Roberto Cominetti
Auxiliares: Roberto Castillo - Mauro Escobar
7 de Agosto de 2009

P3. Considere el campo vectorial dado en coordenadas cilíndricas por

$$\vec{F} = \frac{1}{\rho}\hat{\rho} + e^{-\theta^2}\hat{k}.$$

Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ la superficie dada por la porción del casquete esférico $x^2+y^2+z^2=4$ que se encuentra entre los planos $z=-1$ y $z=1$ (sin considerar las tapas). Bosqueje Σ y calcule el flujo de $\vec{F}$ a través de Σ orientada según la normal exterior a la esfera.

Solución:
Tenemos el campo vectorial en coordenadas cilíndricas:

$$\vec{F} = \frac{1}{\rho}\hat{\rho} + e^{-\theta^2}\hat{k} = F_\rho\hat{\rho} + F_z\hat{k}$$

El dominio de diferenciabilidad de $\vec{F}$ es $\mathbb{R}^3\backslash\{\text{eje } z\}$, pues el campo se indefine cuando $\rho = 0$, y no es diferenciable en tales puntos. Calculemos la divergencia de $\vec{F}$:

$$div(\vec{F}) = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho F_\rho) + \frac{\partial}{\partial\theta}(F_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho F_z)\right] = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{1}{\rho}) + \frac{\partial}{\partial\theta}(0) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho e^{-\theta^2})\right] = 0.$$

Consideremos Σ, la superficie descrita anteriormente. Para aplicar el Teorema de la Divergencia debemos considerar un dominio donde la divergencia esté bien definida, como no podemos incluir el eje z, consideremos Ω el volumen interior a la esfera de radio 2 y que se encuentra entre los planos $z=-1$ y $z=1$, al cual le quitamos un cilindro de radio ϵ, cuyo eje es el eje z entre $z=-1$ y $z=1$, esto es para que no tengamos problema en utilizar el Teorema de la Divergencia.

Luego, por el Teorema de la Divergencia, se tiene que:

$$\iiint_\Omega div(\vec{F})dV = \iint_{\partial\Omega} \vec{F}\hat{n}dS = \iint_\Sigma \vec{F}\hat{n}dS + \iint_{cilindro} \vec{F}\hat{n}dS + \iint_{tapas} \vec{F}\hat{n}dS$$

Dado que $div(\vec{F}) = 0$:

$$\iiint_\Omega div(\vec{F})dV = 0$$

Y entonces:

$$\iint_\Sigma \vec{F}\hat{n}dS = -\iint_{cilindro} \vec{F}\hat{n}dS - \iint_{tapas} \vec{F}\hat{n}dS$$

Calculemos la integral de flujo sobre el cilindro de radio ϵ. Se tiene que la normal exterior es $\hat{n} = -\hat{\rho}$ y $dS = \epsilon d\theta dz$, con $\theta \in [0, 2\pi], z \in [-1, 1]$:

$$\iint_{cilindro} \vec{F}\hat{n}dS = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}(\frac{1}{\epsilon}\hat{\rho} + e^{-\theta^2}\hat{k})(-\hat{\rho})\epsilon d\theta dz = -\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{\epsilon}\epsilon d\theta dz = -\int_{-1}^{1}dz\int_{0}^{2\pi}d\theta = -2\cdot 2\pi$$

$$\iint\limits_{cilindro} \vec{F}\hat{n}dS = -4\pi.$$

Veamos ahora las integrales sobre las tapas. Llamemos $Tapa1$ y $Tapa2$ a las tapas superior e inferior, respectivamente. En la $Tapa1$, se tiene que $z = 1$, $\rho \in [\epsilon, \sqrt{3}]$ (pues, de la intersección del plano $z = 1$ con el casquete esférico $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ resulta $x^2 + y^2 = 3$, ie, $\rho = \sqrt{3}$) y $\theta \in [0, 2\pi)$. Además, $\hat{n} = \hat{k}$:

$$\iint\limits_{Tapa1} \vec{F}\hat{n}dS = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_\epsilon^{\sqrt{3}} (\frac{1}{\rho}\hat{\rho} + e^{-\theta^2}\hat{k})(\hat{k})\rho d\rho d\theta = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_\epsilon^{\sqrt{3}} e^{-\theta^2}\rho d\rho d\theta$$

Y para la $Tapa2$, en $z = -1$, se tiene que $\hat{n} = -\hat{k}$, así:

$$\iint\limits_{Tapa2} \vec{F}\hat{n}dS = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_\epsilon^{\sqrt{3}} (\frac{1}{\rho}\hat{\rho} + e^{-\theta^2}\hat{k})(-\hat{k})\rho d\rho d\theta = -\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_\epsilon^{\sqrt{3}} e^{-\theta^2}\rho d\rho d\theta$$

Entonces

$$\iint\limits_{Tapas} \vec{F}\hat{n}dS = \iint\limits_{Tapa1} \vec{F}\hat{n}dS + \iint\limits_{Tapa2} \vec{F}\hat{n}dS = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_\epsilon^{\sqrt{3}} e^{-\theta^2}\rho d\rho d\theta - \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_\epsilon^{\sqrt{3}} e^{-\theta^2}\rho d\rho d\theta = 0$$

Obteniendo que

$$\iint\limits_{\Sigma} \vec{F}\hat{n}dS = -\iint\limits_{cilindro} \vec{F}\hat{n}dS - \iint\limits_{tapas} \vec{F}\hat{n}dS = -(-4\pi) - 0 = 4\pi.$$

Nota 1: ϵ puede tomar cualquier valor en el intervalo $(0, \sqrt{3}]$. En particular, se puede tomar $\epsilon = \sqrt{3}$, simplificando así el problema, al no tomar en cuenta las integrales de flujo sobre las Tapas, ya que, en este caso, las Tapas no existen.

Nota 2: El cálculo directo de la integral de flujo sobre Σ es más difícil, dado que si se elige la parametrización en coordenadas cilíndricas, el vector normal a la superficie no es simple (dado que es $\hat{r}$ en coordenadas esféricas); además, el elemento de superficie dS debe calcularse con cuidado, ya que ninguna coordenada de la parametrización (ρ, θ, z) se mantiene constante. Por otro lado, si se elige coordenadas esféricas, si bien el vector normal es fácil de representar, la integral que queda por resolver es la que dificulta este camino.

P5. Sea $\Omega \in \mathbb{R}^3$ un abierto acotado de frontera regular $\partial\Omega$, con $0 \in \Omega$. Sea $\vec{f} = \frac{1}{r^k}\hat{r}, k \geq 2, r > 0$. Demuestre que

$$\frac{4\pi}{R_0^{k-2}} \leq \iint\limits_{\partial\Omega} \vec{f} \cdot d\vec{S} \leq \frac{4\pi}{R_1^{k-2}},$$

con $R_1 = \inf\limits_{\vec{r} \in \Omega^C} \|\vec{r}\|$ y $R_0 = \sup\limits_{\vec{r} \in \Omega} \|\vec{r}\|$.

Hint: Calcule primero $\iint\limits_{\partial B(0,R)} \vec{f} \cdot d\vec{S}$, donde $B(0, R)$ es la esfera de centro 0 y radio R.

Solución:

Sea $B(0, R)$ la esfera de centro 0 y radio R. Se tiene que:

$$\iint\limits_{\partial B(0,R)} \vec{f} \cdot d\vec{S} = \iint\limits_{\partial B(0,R)} \frac{1}{R^k}\hat{r} \cdot \hat{n} dA = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{R^k}\hat{r} \cdot \hat{r}(R\sin\varphi d\theta)(Rd\varphi) = \frac{1}{R^{k-2}}\int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$\iint\limits_{\partial B(0,R)} \vec{f} \cdot d\vec{S} = \frac{4\pi}{R^{k-2}}$$

Por otro lado, tenemos que:

$$div\vec{F} = \frac{1}{r^2 \sin\varphi}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^k}r^2 \sin\varphi\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{-k+2}\right) = (-k+2)\frac{1}{r^2}r^{-k+1} = \frac{-k+2}{r^{k+1}} \leq 0.$$

Es decir, la divergencia es siempre negativa (pues $k \geq 2$), para $r > 0$.

Ahora, eligiendo

$$R_1 = \inf_{\vec{r} \in \Omega^C} \|\vec{r}\|, \qquad R_0 = \sup_{\vec{r} \in \Omega} \|\vec{r}\|$$

se tiene que $B(0, R_1) \subset \Omega \subset B(0, R_0)$. Para calcular la integral de la divergencia sobre estos volúmenes debemos sacar al punto 0 del dominio, pues la divergencia se indefine en ese punto. Luego, tomamos $B(0, R_1)\backslash B(0, \epsilon) \subset \Omega\backslash B(0, \epsilon) \subset B(0, R_0)\backslash B(0, \epsilon)$, con $\epsilon > 0$ tal que $B(0, \epsilon) \subset B(0, R_1)$. Luego, usando que $div\vec{f} \leq 0$,

$$\iiint\limits_{B(0,R_0)\backslash B(0,\epsilon)} div\vec{f} dV \leq \iiint\limits_{\Omega\backslash B(0,\epsilon)} div\vec{f} dV \leq \iiint\limits_{B(0,R_1)\backslash B(0,\epsilon)} div\vec{f} dV.$$

Y por el Teorema de la Divergencia,

$$\iint\limits_{\partial(B(0,R_0)\backslash B(0,\epsilon))} \vec{f} \cdot d\vec{S} \leq \iint\limits_{\partial(\Omega\backslash B(0,\epsilon))} \vec{f} \cdot d\vec{S} \leq \iint\limits_{\partial(B(0,R_1)\backslash B(0,\epsilon))} \vec{f} \cdot d\vec{S}$$

$$\iint\limits_{\partial B(0,R_0)} \vec{f} \cdot d\vec{S} + \iint\limits_{\partial B(0,\epsilon)} \vec{f} \cdot d\vec{S} \leq \iint\limits_{\partial\Omega} \vec{f} \cdot d\vec{S} + \iint\limits_{\partial B(0,\epsilon)} \vec{f} \cdot d\vec{S} \leq \iint\limits_{\partial B(0,R_1)} \vec{f} \cdot d\vec{S} + \iint\limits_{\partial B(0,\epsilon)} \vec{f} \cdot d\vec{S}$$

$$\frac{4\pi}{R_0^{k-2}} = \iint\limits_{\partial B(0,R_0)} \vec{f} \cdot d\vec{S} \leq \iint\limits_{\partial\Omega} \vec{f} \cdot d\vec{S} \leq \iint\limits_{\partial B(0,R_1)} \vec{f} \cdot d\vec{S} = \frac{4\pi}{R_1^{k-2}}.$$

Que es lo que queríamos.

Dudas a: mescobar@dim.uchile.cl