Auxiliar 1: Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Profesor: Roberto Cominetti
Auxiliares: Roberto Castillo - Mauro Escobar

7 de Agosto de 2009

P1. Sea S la superficie cerrada formada por el hemisferio $S_1 = \left\{x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\right\}$, y su base $S_2 = \left\{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z = 0\right\}$. Sea el campo eléctrico definido por

$$\vec{E}(x, y, z) = 2x\hat{\imath} + 2y\hat{\jmath} + 2z\hat{k}.$$

(a) Evaluar $I_1 = \iint\limits_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint\limits_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}$ orientado según la normal exterior.

(b) Sea V el volumen encerrado por S, calcule $I_2 = \iiint\limits_{V} div\vec{E}dV$.

P2. Calcule el flujo del campo:

$$\vec{F}(x, y, z) = (e^z \sin y + xy^2 z, e^x \cos z + x^2 yz, x^2)$$

a través del manto del cono de ecuación $z = r - 1$, $-1 \leq z \leq 0$, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

P3. Considere el campo vectorial dado en coordenadas cilíndricas por

$$\vec{F} = \frac{1}{\rho}\hat{\rho} + e^{-\theta^2}\hat{k}.$$

Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ la superficie dada por la porción del casquete esférico $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que se encuentra entre los planos $z = -1$ y $z = 1$ (sin considerar las tapas). Bosqueje Σ y calcule el flujo de $\vec{F}$ a través de Σ orientada según la normal exterior a la esfera.

P4. Calcule el flujo vectorial

$$\vec{F} = xy^2\hat{\imath} + yz^2\hat{\jmath} + zx^2\hat{k}$$

a través del la superficie del sólido definido por las ecuaciones:

$$2 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \quad 0 \leq z \leq 5.$$

P5. Sea $\Omega \in \mathbb{R}^3$ un abierto acotado de frontera regular $\partial\Omega$, con $0 \in \Omega$. Sea $\vec{f} = \frac{1}{r^k}\hat{r}, k \geq 2, r > 0$. Demuestre que

$$\frac{4\pi}{R_0^{k-2}} \leq \iint\limits_{\partial\Omega} \vec{f} \cdot d\vec{S} \leq \frac{4\pi}{R_1^{k-2}},$$

con $R_1 = \inf\limits_{\vec{r} \in \Omega^C} \|\vec{r}\|$ y $R_0 = \sup\limits_{\vec{r} \in \Omega} \|\vec{r}\|$.

Hint: Calcule primero $\iint\limits_{\partial B(0,R)} \vec{f} \cdot d\vec{S}$, donde $B(0, R)$ es la esfera de centro 0 y radio R.

P6. Considere el campo en coordenadas esféricas dado por

$$\vec{F} = r^2\hat{r} + r\theta\sin^3\varphi\hat{\theta}.$$

Calcule $div\vec{F}$ en todo punto del dominio de diferenciabilidad de $\vec{F}$, vale decir, $\mathbb{R}^3\backslash$Eje z. Sea Ω la región de la esfera unitaria $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ que intersecta al cono infinito $z \geq \sqrt{x^2+y^2}$. Defina

$$\Omega(\epsilon) = \left\{(x,y,z) \in \Omega | x^2+y^2 \geq \epsilon^2\right\},$$

para $\epsilon > 0$ pequeño. Bosqueje $\Omega(\epsilon)$ y encuentre el valor de

$$I = \lim_{\epsilon\to 0} \iiint\limits_{\Omega(\epsilon)} div\vec{F}dV.$$

P7. Considere un volumen $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ definido por las inecuaciones

$$|z| \leq 2 - x^2 - y^2, \quad (x-1)^2 + y^2 \leq 1.$$

Bosqueje Ω y use el Teorema de la Divergencia para calcular el flujo del campo $\vec{F} = \rho\hat{\rho}$ a través de $\partial\Omega$ orientada según la normal exterior. (Puede dejar expresada la integral)