MA2001 - Cálculo en Varias Variables.
Profesor: Jorge Amaya. **Auxiliares:** Franco Basso, Mauricio Fuentes.

Control 3

28 de Octubre 2009

$\boxed{\text{P1.}}$

a) [1.5 pto] Calcule la siguiente integral: $\displaystyle\int_D \frac{x}{1+xy}dxdy$, donde D es el conjunto en $\mathbb{R}^2$ encerrada por la figura de vertices (0,0), (2,0), (2,1), y (1,1).

b) El objetivo de este problema es demostrar el famoso resultado:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

Para ello actuaremos como sigue:

i) [1 pto] Defina $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$ y demuestre que $I^2 = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}dxdy$.

ii) [2 ptos] Defina $J_R = \displaystyle\int_{-R}^{R}\int_{-R}^{R} e^{-x^2-y^2}dxdy$. Utilice un cambio de coordenadas adecuado y por medio del teorema del sandwich, pruebe que $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} J_R = \pi$. Concluya el resultado.

c) [1.5 ptos] Use la parte b) para calcular la siguiente integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-(x-y)^2-y^2}dxdy$$

$\boxed{\text{P2.}}$

a) [3 ptos] Encuentre puntos críticos de la función $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$. Clasifíquelos entre máximos locales, minimos locales y puntos sillas.

b) [3 ptos] Sea $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2y^2z = 1\}$. Encuentre la menor distancia entre D y el origen. Es decir calcule $\displaystyle\inf_{d\in D} ||d||_2$.

$\boxed{\text{P3.}}$

a) [3 ptos] Use coordenadas esféricas para calcular el volumen resultante de la intersección entre la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y el cono de ecuación $z = \sqrt{x^2+y^2}$ sobre el eje xy (es decir $z \geq 0$).

b) [3 ptos] Usando el Teorema de Lagrange, encuentre el máximo valor de la función $f(x,y,z) = x + 2y + 3z$ en la curva resultante de la interseccion del plano $x - y + z = 1$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

Tiempo: 3 hrs