

Control 1

19 de Agosto, 2009

P1. Considere una función $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

- a) [1.0 ptos] Sea $y_0 \in \mathbb{R}^m$. Demuestre que $\{y_0\}$ es un conjunto cerrado de $\mathbb{R}^m$.
- b) [2.0 ptos] Sea $A \subseteq \mathbb{R}^m$ un conjunto cerrado y suponga que f es continua en $\mathbb{R}^n$. Demuestre que $f^{-1}(A)$ es un cerrado de $\mathbb{R}^n$.
- c) [1.5 ptos] Demuestre que si f es lineal y continua en cero, entonces es continua en todo $\mathbb{R}^n$.
- d) [1.5 ptos] Concluya que si f es lineal y continua en cero, entonces $\text{Ker}(f)$ es cerrado.

P2. Sea $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida como:
$$f(x, y) = \begin{cases} |x| \sqrt{\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}} - 1} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ a & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- a) [1 pto] Determine $A = \text{Dom}(f)$ y grafique.
- b) [1.5 ptos] Encuentre $\text{Adh}(A)$, $\text{Int}(A)$, $\text{Fr}(A)$. Justifique su respuesta.
- c) [2.5 ptos] Encuentre los valores de a tal que f sea continua en su dominio.
- d) [1 pto] Demuestre que f alcanza sus extremos en A .

P3. a) [2 ptos] Sea $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y suponga además que Ω es cerrado. Defina $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ con } x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R} / y \geq f(x)\}$. Demuestre que E es cerrado.

b) [2 ptos] Defina $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(x) = \|x\|_2 + \|x\|_\infty$. Demuestre que h es una norma en $\mathbb{R}^n$.

c) [2 ptos] Un productor fabrica un producto el cual requiere de 3 insumos con cantidades respectivas $x_1, x_2, x_3 \geq 0$. Se sabe que la ganancia del productor depende de la cantidad de insumos utilizados de la siguiente forma $G(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 - x_2 + x_3^2$. Además se sabe que por restricciones de mercado se debe cumplir que $\begin{cases} x_1 - x_3 = 8 \\ x_2 + 3x_3 = 18 \end{cases}$
Encuentre los valores x_1^*, x_2^*, x_3^* que maximizan la ganancia.

Tiempo: 3 Horas