MA2001 - Cálculo en Varias Variables.
Profesor: Jorge Amaya. **Auxiliares:** Franco Basso, Mauricio Fuentes.

Auxiliar 4

18 de Agosto 2009

P1. El objetivo de este problema es demostrar que el conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^2$ definido por $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y < 0\}$ es abierto. Para ello primero demuestre:

i) Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continua entonces $\forall B \subseteq \mathbb{R}^m$ abierto $f^{-1}(B)$ es abierto.

ii) Concluya que A es abierto.

P2. Calcular los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$

P3. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se define el radio de un conjunto como: $\delta(A) = \sup\limits_{(x,y)\in A\times A} \|x-y\|$
Demuestre que si $A \cap B = \emptyset$ entonces $\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B)$

P4.

i) Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función que verifica la siguiente propiedad: $\exists C \geq 0$ tal que $\forall x, y \in D$, $\|f(x) - f(y)\| \leq C\|x - y\|$. Demuestre que f es continua.

ii) Sea $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineal. Demuestre que la aplicación $n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $n(x) = \|x\|_{\mathbb{R}^n} + \|L(x)\|_{\mathbb{R}^m}$ en una norma en $\mathbb{R}^n$.

iii) Muestre que si una aplicación lineal $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ verifica la propiedad $\exists M \geq 0$ tal que $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $\|L(x)\| \leq M\|x\|$ entonces L es continua en $\mathbb{R}^n$.

P5. Un productor fábrica un producto el cual requiere de 3 ínsumos con cantidades respectivas x_1, x_2, x_3. Se sabe que la ganancia del productor depende de la cantidad de ínsumos utilizados de la siguiente forma $G(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 - x_2 + x_3^2$. Además se sabe que por restricciones de mercado se debe cumplir que $\begin{cases} x_1 - x_3 = 8 \\ x_2 + 3x_3 = 18 \end{cases}$
Encuentre los valores x_1^*, x_2^*, x_3^* que maximizan la ganancia.

P6. Sean A cerrado y B compacto y tal $A \cap B = \emptyset$. Defina la distancia entre A y B como $d(A,B) = \inf\limits_{a\in A, b\in B} \|a - b\|$. Demuestre que $d(A,B) > 0$. Dé un contraejemplo para el caso en que B es sólo cerrado.