Esto nos da el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y+\lambda+2\mu x &= 0 \\ x+\lambda+2\mu y &= 0 \\ 1+\lambda+2\mu z &= 0 \\ x+y+z &= 0 \\ x^2+y^2+z^2-1 &= 0, \end{cases}$$

cuyas 4 soluciones para $(x, y, z)$ son
$(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}})$, $(\frac{1+\sqrt{5}}{4}, \frac{1-\sqrt{5}}{4}, -\frac{1}{2})$ y $(\frac{1-\sqrt{5}}{4}, \frac{1+\sqrt{5}}{4}, -\frac{1}{2})$.
De estos, el segundo da el valor máximo para $f$, que es $\frac{2}{\sqrt{6}}$.

Ejemplo 2.3. Una desigualdad clásica en los números reales enuncia que la *media geométrico* de $m$ números positivos es menor que la *media aritmético*, a menos que todos estos números sean iguales. Más precisamente si $a_i > 0$ para $i = 1, \ldots, N$, entonces se tiene la desigualdad

$$(a_1 a_2 \cdots a_N)^{\frac{1}{N}} \leq \frac{1}{N}(a_1 + \cdots + a_N),$$

la cual es estricta a menos que todos los números sean iguales. Para probar esto, consideremos la función

$$f(x_1, \ldots, x_N) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

sobre el conjunto definido por la restrición

$$g(x_1, \ldots, x_N) := \prod_{i=1}^{N} x_i - 1 = 0$$

Consideramos a las funciones $f$ y $g$ a su vez definidas sobre el abierto de $\mathbb{R}^N$ dado por el conjunto de puntos $x$ con $x_i > 0$ para todo $i$. Observemos primero que si para algún $i$ se tiene $x_i > N$, entonces

$$f(x_1, \ldots, x_N) > 1 = f(1, \ldots, 1).$$

Por lo tanto, el mínimo de $f$ sobre la región cerrada y acotada

$$\{x \in \mathbb{R}^N \ / g(x) = 0,\ 0 \leq x_i \leq N \text{ para todo } i\}$$

(que existe pues $f$ es continua) debe ser el mínimo de $f$ sujeto a la restricción completa $g = 0$. Así, definamos

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i - \lambda(\prod_{i=1}^{N} x_i - 1).$$

En el punto de mínimo tenemos una solución $(x, \lambda)$ del sistema

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\mathcal{L}(x,\lambda) = 0 \text{ para todo } j, \quad \frac{\partial}{\partial \lambda}\mathcal{L}(x,\lambda) = 0.$$

Esto es

$$\frac{1}{N} = \lambda \prod_{i \neq j} x_i = 0 \text{ para todo } j, \quad \prod_{i=1}^{N} x_i - 1 = 0.$$

Tenemos entonces que, en el mínimo,

$$\frac{x_j}{N} = \lambda \prod_{i=1}^{N} x_i = \lambda \text{ para todo } j,$$

y por lo tanto, $x_1 = x_2 = \cdots x_N = 1$. Esto se traduce en que

$$1 \leq \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i, \quad \text{si} \prod_{i=1}^{N} x_i = 1,$$

Con desigualdad estricta a menos que todos estos números sean iguales. Consideremos ahora $a_1, \ldots, a_N$ números positivos cualesquiera y definamos

$$x_j := \frac{a_j}{\left(\prod_{i=1}^{N} a_i\right)^{\frac{1}{N}}}.$$

Claramente $\prod_{i=1}^{N} x_i = 1$, y por lo tanto

$$1 \leq \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \frac{a_j}{\left(\prod_{i=1}^{N} a_i\right)^{\frac{1}{N}}}.$$