Auxiliar 9 - Cálculo en Varias Variables
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile

Profesor Cátedra: Jaime H. Ortega
Profesores Auxiliares: Pía Francisca Leyton - Matías Godoy Campbell

Pregunta 1. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{2\sqrt{2}}{3}xy$$

Encuentre los puntos en que f alcanza sus máximos y mínimos globales sobre la región $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + 2y^2 \leq 1\}$. Explique por qué estos puntos existen

Pregunta 2. Distancia mínima entre una recta y una elipse
Considere la elipse E y la recta L definidas por:

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$$
$$L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$$

Queremos determinar la mínima distancia entre E y L, para ello, primero determine condiciones sobre a y b de modo tal que E y L no se intersecten, luego, bajo esta condición, determine la mínima distancia entre estos conjuntos.

Pregunta 3. Resultados geométricos

a) Pruebe que entre todos los rectángulos inscritos en una circunferencia de radio r fijo, el que posee mayor área es un cuadrado.

b) El objetivo de este problema es demostrar que, entre todos los triángulos en los cuales se inscribe una circunferencia de radio r fijo, el área máxima es el triángulo equilátero. Para ello, se plantean los siguientes pasos:

- **(i)** Sean x, y, z los largos de las tangentes a la circunferencia obtenidos desde los vértices del triángulo. Pruebe que bajo estas condiciones: $A_\triangle = r(x+y+z)$
- **(ii)** Es posible demostrar (no lo haga) que dado un triángulo de lados a, b, c, su área es: $A_\triangle = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. Con $s = \frac{a+b+c}{2}$. Pruebe que bajo estas condiciones: $A_\triangle = \sqrt{xyz(x+y+z)}$
- **(iii)** Plantee el problema de optimización y demuestre lo enunciado.

Pregunta 4. Resultados trigonométricos
Sean α, β, γ los ángulos de un triángulo cualquiera. Pruebe que se tiene:

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}$$
$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

En que caso se alcanzan estos valores?