P2 $(\alpha_n)_n$ sucesión convergente (en $\mathbb{R}$) y $f: E \to E$ aplicación

tal que: $\|f^{(n)}(x) - f^{(n)}(y)\| \leq \alpha_n \|x - y\|$ $(*)$

composición!

observaciones · $(\alpha_n)_n$ debe ser sucesión de términos positivos por $(*)$

de lo contrario, si $\exists\, \alpha_n < 0$

$\|f^{(n)}(x) - f^{(n)}(y)\| \leq \underset{<0}{\alpha_n} \|x-y\| < 0 \quad \forall x, y \in E$ $\forall n$

$\Rightarrow f^{(n)} \equiv 0 \Rightarrow f \equiv 0$ y el problema pierde sentido.

luego $(\alpha_n)_n$ es sucesión de términos positivos, es convergente

Además $\sum_n^\infty \alpha_n$ es convergente. luego, de Cálculo de 1er año

sabemos que si $\sum_n^\infty \alpha_n < \infty$ y $(\alpha_n)_n$ es positiva $\forall n$

$\Rightarrow \alpha_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. $(\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\, n_0$ tq $\forall n \geq n_0 \quad \alpha_n < \varepsilon)$.

· $f: E \to E$ es continua, por $(*)$ para $n = 1$

$\Rightarrow \|f(x) - f(y)\| \leq \alpha_1 \cdot \|x - y\|$ osea f es Lipschitz

$\Rightarrow$ es continua.

con estas observaciones será más fácil abordar el problema.

a) Sea $\bar{x}$ pto. fijo de f, ie. $f(\bar{x}) = \bar{x}$

Supongamos que $\exists$ otro, ie. $\exists y$ tq $f(y) = y$. Pdq $y = \bar{x}$.

Recordemos (lo vimos en clase Aux) que si x es pto. fijo de f, x es

pto fijo de f^n $\forall n \in \mathbb{N}$ $\left(f(x) = x \Rightarrow \underbrace{f(f(x))}_{f^2(x)} = f(x) = x \ldots f^n(x) = x\right)$ $\forall n$.

de $(*)$ $\|f^n(\bar{x}) - f^n(y)\| \leq \alpha_n \cdot \|\bar{x} - y\|$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Si tomamos $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\alpha_{n_0} < 1$ (Existe, lo vimos en las Observaciones)

$$\Rightarrow \underbrace{\|f^{n_0}(\bar{x})}_{\bar{x}} - \underbrace{f^{n_0}(y)}_{y}\| \leq \underbrace{\alpha_{n_0}}_{<1} \|\bar{x} - y\| < \|\bar{x} - y\|$$

(son ptos fijos)

$$\Rightarrow \|\bar{x} - y\| < \|\bar{x} - y\| \Rightarrow \bar{x} = y$$ // el pto. fijo es único.

b) $x_0 \in E$. Pdq $(f^n(x_0))_n$ es de Cauchy.

Sigamos la indicación, probemos que $\|f^{n+m}(x_0) - f^n(x_0)\| \leq \|f(x_0) - x_0\| \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_{n+k}$

En efecto, notemos que:

$$\|f^{n+m}(x_0) - f^n(x_0)\| = \|f^{n+m}(x_0) - f^{n+m-1}(x_0) + f^{n+m-1}(x_0) - f^n(x_0)\|$$

$$= \|f^{n+m-1}(f(x_0)) - f^{n+m-1}(x_0) + f^{n+m-1}(x_0) - f^n(x_0)\|$$

desig. Δ.

$$\leq \|f^{n+m-1}(\underbrace{f(x_0)}_{y}) - f^{n+m-1}(x_0)\| + \|f^{n+m-1}(x_0) - f^n(x_0)\|$$

(*)

$$\leq \alpha_{n+m-1} \|f(x_0) - x_0\| + \underbrace{\|f^{n+m-1}(x_0) - f^n(x_0)\|}_{\text{hacemos lo mismo con este.}}$$

$$= \alpha_{n+m-1} \|f(x_0) - x_0\| + \|f^{n+m-2}(f(x_0)) - f^{n+m-2}(x_0) + f^{n+m-2}(x_0) - f^n(x_0)\|$$

$$\leq \alpha_{n+m-1} \|f(x_0) - x_0\| + \|f^{n+m-2}(f(x_0)) - f^{n+m-2}(x_0)\| + \|f^{n+m-2}(x_0) - f^n(x_0)\|$$

$$\leq \alpha_{n+m-1} \|f(x_0) - x_0\| + \alpha_{n+m-2} \|f(x_0) - x_0\| + \|f^{n+m-2}(x_0) - f^n(x_0)\|$$

$$= \|f(x_0) - x_0\| (\alpha_{n+m-1} + \alpha_{n+m-2}) + \|f^{n+m-2}(x_0) - f^n(x_0)\|$$

⋮ sucesivamente

$$\leq \|f(x_0) + x_0\| \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_{n+k}$$ que era lo deseado.

Tenemos que: $\|f^{m+n}(x_0) - f^n(x_0)\| \leq \|f(x_0) - x_0\| \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_{n+k}$

gracias a esto podremos ver que $(f^n(x_0))_n$ es de Cauchy.

En efecto, si $n, m \to \infty$, como $\sum_n \alpha_n$ es convergente (y posit)

$$\alpha_{n+k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad y \quad \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_{n+k} \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad (\text{la cola de la serie})$$

$$\Rightarrow \|f^{n+m}(x_0) - f^n(x_0)\| \leq \|f(x_0) - x_0\| \underbrace{\sum_{k=0}^{m-1} \alpha_{n+k}}_{\to 0 \text{ si } n,m\to\infty}$$

$\Rightarrow \|f^{n+m}(x_0) - f^n(x_0)\| \to 0$ si $n, m \to \infty$. ie. $(f^n(x_0))_n$ es de Cauchy.

c) $(f^n(x_0))_n$ converge, pues es sucesión de Cauchy en E espacio de Banach, que por def. es un espacio donde las sucesiones de Cauchy convergen.

$\Rightarrow (f^n(x_0))_n \longrightarrow y \in E$. Solo falta ver que y es pto. fijo de f.

En efecto: $\|f(y) - y\| \leq \underset{(*)}{\|f(y) - f^n(x_0)\|} + \underbrace{\|f^n(x_0) - y\|}_{< \varepsilon \text{ pues } f^n(x_0) \to y \text{ (para } n \text{ suf. grande)}}$

basta ver que $(*) \to 0$ (o que $(*) < \varepsilon$)

pero esto se tiene del hecho que f es continua:

como $f^{n-1}(x_0) \xrightarrow{n\to\infty} y \Rightarrow \underbrace{f(f^{n-1}(x_0))}_{f^n(x_0)} \xrightarrow{n\to\infty} f(y)$ (si $x_n \to x$ y f cont $\Rightarrow f(x_n) \to f(x)$)

$\Rightarrow \|f^n(x_0) - f(y)\| < \varepsilon \Rightarrow \|f(y) - y\| < \varepsilon \; \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \boxed{f(y) = y}$ ie. y es pto fijo