Auxiliar Extra Control 2 - Cálculo en Varias Variables
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile

Profesor Cátedra: Jaime H. Ortega
Profesores Auxiliares: Pía Francisca Leyton - Matías Godoy Campbell

Pregunta 1. Regla de la cadena

a) Sea $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ diferenciable. Sean además: $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $h : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$G(t) = f(t, t, \cdots, t) \qquad h(x_1, \cdots, x_N) = G\left(\frac{x_1 + \cdots + x_N}{N}\right)$$

Calcule $G'(t)$ y $\nabla h(x_1, \cdots, x_N)$ en términos de las derivadas parciales de f. Pruebe además que $\forall s \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}(f - h)(s, s, \cdots, s) = 0$$

b) Se define el operador diferencial Laplaciano en $\mathbb{R}^N$ con $N \geq 2$ como la traza de la matriz hessiana, es decir: $\Delta u = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$. El propósito de esta pregunta es determinar soluciones en $\mathbb{R}^N$ de forma radial (es decir de la forma $u(x) = v(r)$ con $r = |x| = \sqrt{x_1 + \cdots + x_N}$) para la ecuación de Laplace: $\Delta u = 0$

Para ello, pruebe primero que: $\Delta u = v''(r) + \dfrac{N-1}{r} \cdot v'(r)$

A partir de lo anterior, pruebe que entonces se tiene: $v(r) = \begin{cases} b \cdot log(r) + c & \text{si } N = 2 \\ \frac{b}{r^{N-2}} + c & \text{si } N \geq 3 \end{cases}$

Pregunta 2. Punto Fijo

Consideremos un espacio de Banach E (es decir, un espacio donde las sucesiones de Cauchy convergen), con norma $||\cdot||$ y sea $f : E \to E$ una función. Supongamos que existe una serie convergente de números reales $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ es convergente y además se verifica

$$||f^n(x) - f^n(y)|| \leq \alpha_n \cdot ||x - y||$$

El objetivo de esta pregunta es demostrar que f tiene un único punto fijo, más aun si x_0 es cualquier punto de E, la sucesión $(f^n(x_0))_n$ converge al punto fijo. Para probar lo anterior utilizaremos los siguientes pasos:

a) Muestre que si f tiene un punto fijo, entonces este es único.

b) Sea $x_0 \in E$. Muestre que la sucesión $(f^n(x_0))_n$ es una sucesión de Cauchy. Para ello muestre que si $n,\ m \in \mathbb{N}$ entonces:

$$||f^{n+m}(x_0) - f^n(x_0)|| \leq ||f(x_0) - x_0|| \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_{n+k}$$

y concluya.

c) Pruebe que la sucesión $(f^n(x_0))_n$ es convergente y converge a un punto fijo de f.

Pregunta 3. Teorema de Taylor.

a.1) Encuentre el polinomio de Taylor de orden 2 de la función $f(x, y) = sen^2(x + y) + x^2 y$ en torno al punto $(1, -1)$.

a.2) Pruebe que se tiene: $|f(1 + h_1, -1 + h_2) - \mathcal{P}_2(h_1, h_2)| \leq 8 \cdot ||h||^3$

b) Considere la función de 3 variables:

$$f(x, y, z) = x^2 y^4 z + 3xy^2 z - 5x^2 y^3 + 5x^3 z + (x^8 + z^8) e^{-y^2 - x^2} cos(xyz)$$

Encuentre su polinomio de Taylor de orden 6 en torno al punto $(0, 0, 0)$

Pregunta 4. Considere la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$

a) Demuestre que si f tiene un mínimo local en x_0, entonces la matriz Hessiana $Hf(x_0)$ es semidefinida positiva, es decir:

$$h^t Hf(x_0) h \geq 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$$

b) Suponga que la función $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ satisface la ecuación diferencial:

$$\Delta u(x) = -1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Demuestre que u no puede tener un mínimo local.