

Teorema función Implícita. Aux Cálculo en Varias Variables

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^m$ abtos y C^1 Prof: Taine Ortega.

$f: \Omega \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función $C^1(\Omega \times \Lambda)$ su pongamos
 $(x, y) \mapsto f(x, y)$

que $(x_0, y_0) \in \Omega \times \Lambda$ y que $f(x_0, y_0) = 0$ y $f_y(x_0, y_0)$ es invertible.

Entonces $\exists U$ abto. con $x_0 \in U \subseteq \Omega$ y una función $\phi: U \rightarrow \Lambda$ de $C^1(U)$ tq:

$$\phi(x, \phi(x)) = 0 \quad \forall x \in U$$

* Una función es C^1 si sus coordenadas son C^1 todas

P1 PRUEBE QUE EL SISTEMA DE ECUACIONES

$$e^u + xy^2 + v = 2$$

$$\ln(u) + x^2y + v^3 = 1$$

DEFINE A u Y v COMO FUNCIONES IMPLÍCITAS DIFERENCIABLES DE LAS VARIABLES x Y y EN UNA VECINDAD DE $(x_0, y_0, u_0, v_0) =$

$(0, 2, 0, 1)$. SEAN $u = u(x, y)$ Y $v = v(x, y)$ LAS FUNCIONES

IMPLÍCITAS CUYA EXISTENCIA SE HA PROBADO. CALCULE

$$u(0, 2); v(0, 2); \frac{\partial u}{\partial x}(0, 2); \frac{\partial u}{\partial y}(0, 2); \frac{\partial v}{\partial x}(0, 2); \frac{\partial v}{\partial y}(0, 2)$$

Sol:

Debemos aplicar el teorema de la función implícita. En efecto, consideremos $F: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la función definida por

$$F((x, y), (u, v)) = (e^u + xy^2 + v - 2; \ln(u) + x^2y + v^3 - 1)$$

(1)

Notamos que F es de clase C^1 (pues es C^∞).

Además:

$$\bullet F((0,2);(0,1)) = (0,0)$$

$$\bullet F_{(u,r)}((x,y),(u,r)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u}(e^u + xy^2 + r - 2) & \frac{\partial}{\partial r}(e^u + xy^2 + r - 2) \\ \frac{\partial}{\partial u}(\sin(u) + x^2y + r^3 - 1) & \frac{\partial}{\partial r}(\sin(u) + x^2y + r^3 - 1) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} e^u & 1 \\ \cos(u) & 3r^2 \end{pmatrix}, \text{ luego}$$

$$F_{(u,r)}((0,2);(0,1)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ que es invertible (Det } \neq 0 \text{)}$$

$1 \cdot 3 - 1 \cdot 1 = 2 \neq 0$

Entonces por el teorema de la función implícita, existen vecindades U y W de $((0,2);(0,1))$ y $(0,1)$ respectivamente y una única función $g: W \rightarrow \mathbb{R}^2$ de clase C^1 definida por $g(x,y) = (u(x,y), r(x,y))$ tal que

$$1) F((x,y);(u,r)) = 0 \text{ para todo } (x,y) \in W$$

$$2) g(0,2) = (u(0,2); r(0,2)) = (0,1)$$

$$\text{luego } u(0,2) = 0$$

$$r(0,2) = 1$$

Además

$$J(g,(0,2)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(0,2) & \frac{\partial u}{\partial y}(0,2) \\ \frac{\partial r}{\partial x}(0,2) & \frac{\partial r}{\partial y}(0,2) \end{pmatrix}$$

$$= - [F_{(u,r)}((0,2);(0,1))]^{-1} F_{(x,y)}((0,2);(0,1))$$

$$= - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} * \\ * \end{bmatrix}$$

$$* \Rightarrow F_{(x,y)}((x,y);(u,v)) = \begin{pmatrix} y^2 & 2xy \\ 2xy & x^2 \end{pmatrix}$$

evaluando en $(0,2);(0,1)$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

de donde encontramos

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(0,2) & \frac{\partial u}{\partial y}(0,2) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(0,2) & \frac{\partial v}{\partial y}(0,2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,2) = -6 \quad \frac{\partial u}{\partial y}(0,2) = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial x}(0,2) = 2 \quad \frac{\partial v}{\partial y}(0,2) = 0 //$$

Teorema función implícita

Sea $F: A \subseteq \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1 y sea $(x_0, y_0) \in A$ un pto. tal que:

1) $F(x_0, y_0) = 0$ 2) $F_y(x_0, y_0)$ es invertible

Entonces existen vecindades U y W de (x_0, y_0) y x_0 , respectivamente, y una única función $g: W \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1 tal que

1) $F(x, g(x)) = 0$ para todo $x \in W$ 2) $g(x_0) = y_0$ y

$$J(g, x_0) = -[F_y(x_0, y_0)]^{-1} F_x(x_0, y_0)$$

P2 CONSIDERE EL SISTEMA DE DOS ECUACIONES Y CUATRO INCÓGNITAS

$$z^3x + w^2y^3 + 2xy = 0$$

$$xyzw - 1 = 0$$

MUESTRE QUE EXISTEN FUNCIONES $w = w(x, y)$ $z = z(x, y)$ DE CLASE C^1 , DEFINIDAS EN UNA VECINDAD DEL PUNTO $(-1, -1)$ CON $w(-1, -1) = 1 = z(-1, -1)$

Y QUE SATISFACEN EL SISTEMA ANTERIOR. ENCUENTRE LAS DERIVADAS PARCIALES DE ESTAS FUNCIONES EN ESTE PUNTO.

Definimos $F: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y, z, w) \mapsto F(x, y, z, w)$$

$$F(x, y, z, w) = (z^3x + w^2y^3 + 2xy, xyzw - 1)$$

F es de clase C^1 . Notamos

$$F(-1, -1, 1, 1) = (-1 - 1 + 2, 1 - 1) = (0, 0)$$

$$F_{(z, w)}(-1, -1, 1, 1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial z} & \frac{\partial F_1}{\partial w} \\ \frac{\partial F_2}{\partial z} & \frac{\partial F_2}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3z^2x & 2wy^3 \\ xyw & xyz \end{pmatrix}$$

$= \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y esta matriz es invertible porque el $\det \neq 0$. luego por el teorema de la función implícita asegura que existen vecindades z y w de $(-1, -1, 1, 1)$ y $(1, 1)$ respectivamente y una única fn $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de clase C^1 definida por $g(x, y) = (z(x, y), w(x, y))$ tal que

$$F((x,y);(z,w)) = 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

$$g(-1,-1) = (z(-1,-1); w(-1,-1)) = (1,1)$$

$$\text{Entonces } z(-1,-1) = 1 = w(-1,-1)$$

Además

$$J(g,(-1,-1)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x}(-1,-1) & \frac{\partial z}{\partial y}(-1,-1) \\ \frac{\partial w}{\partial x}(-1,-1) & \frac{\partial w}{\partial y}(-1,-1) \end{pmatrix}$$

$$= -[F_{(z,w)}(-1,-1,1,1)]^{-1} F_{(x,y)}(-1,-1,1,1)$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \quad *$$

$$* F_{(x,y)}(-1,-1,1,1) = \begin{pmatrix} z^3 + 2y & yzw \\ 3y^2w^2 + 2x & xzw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{+3} \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot 3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Luego

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x}(-1,-1) & \frac{\partial z}{\partial y}(-1,-1) \\ \frac{\partial w}{\partial x}(-1,-1) & \frac{\partial w}{\partial y}(-1,-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -3$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 4$$

Máximos y Mínimos de funciones continuas

Sea $K \subseteq \mathbb{R}^N$ $K \neq \emptyset$ un conjunto cerrado y acotado

$f: K \rightarrow \mathbb{R}$ continua $\exists x^*, x_* \in K$ tq

$$\begin{array}{ccc} f(x_*) \leq f(x) \leq f(x^*) & \forall x \in K. \\ \downarrow \text{min} & & \downarrow \text{máx} \end{array}$$

Teorema

Sea $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ continua y coerciva. Entonces

$$\exists x_* \in \mathbb{R}^N$$

$$f(x_*) \leq f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \quad \leftarrow \text{Mínimo Global}$$

Coerciva

$f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ coerciva si:

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

Puntos críticos de funciones diferenciables

$f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abto

$x_0 \in \Omega$ es un pto crítico de f si f es diferenciable

$$\nabla f(x_0) = 0$$

Matriz semidefinida positiva

$$A \in \mathcal{M}_{N \times N}$$

Si $\lambda_i \geq 0 \quad \forall i$ entonces A es semidef. positiva

Si $\lambda_i > 0 \quad \forall i$ " " " def. positiva

Si $\lambda_i \leq 0 \Rightarrow A$ es semidef. neg.

Si $\lambda_i < 0 \rightarrow A$ es def. neg.

Criterio de 2º orden

Si $f \in C^2(\Omega)$ $x_0 \in \Omega$ es pto crítico entonces:

a) Si x_0 es mín local de $f \rightarrow f''(x_0)$ es semidef. pos
" " " máx " " " " " neg

b) Si $f''(x_0)$ es def. positiva $\rightarrow x_0$ es mín local
" " " negativa " " máx "

DETERMINAR LA NATURALEZA DE LOS PUNTOS CRÍTICOS DE:

$$f(x, y) = (x - y + 1)^2$$

Sol:

$$\nabla f(x, y) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x - y + 1) \\ -2(x - y + 1) \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y = x + 1$$

se tienen infinitos puntos críticos.

Notemos además que:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda I|$$

$$\begin{pmatrix} 2 - \lambda & -2 \\ -2 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \lambda & -2 \\ -2 & 2 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$1 \cdot 1 = (2 - \lambda)^2 - 4$$

cuyos valores propios son

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 4 \quad \text{como } \lambda_1, \lambda_2 \geq 0$$

$\Rightarrow H_f$ es semidefinida positiva.

$\Rightarrow y = x + 1$ es mínimo global

P4 BUSCAR Y CLASIFICAR LOS PUNTOS CRÍTICOS DE

$$f(x, y) = x^3 - y^3 + 6xy$$

Sol:

$$\nabla f(x, y) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 + 6y \\ -3y^2 + 6x \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 + 6y = 0 \Rightarrow y = -\frac{3x^2}{6} = -\frac{x^2}{2} \rightarrow y^2 = \frac{x^4}{4} \\ -3y^2 + 6x = 0 \Rightarrow 3y^2 = 6x \Rightarrow \\ 3 \cdot \frac{x^4}{4} = 6x \\ \frac{3}{4}x^4 = 6x \Rightarrow x^4 = \frac{6 \cdot 4}{3} \\ x^4 = 8 \Rightarrow x = \sqrt[4]{8} \end{cases}$$

$$-3 \cdot \frac{x^4}{4} + 6x = 0$$

$$x \left(-\frac{3}{4}x^3 + 6 \right) = 0$$

$$x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$$

(4)

- 1) Si $x=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow P_1=(0,0)$
 2) Si $x=2 \Rightarrow y=-2 \Rightarrow P_2=(2,-2)$

Además

$$H_{\mp}(x,y) = \begin{bmatrix} 6x & 6 \\ 6 & -6y \end{bmatrix}$$

Def: Punto Silla

Decimos que $x_0 \in \Omega$ es pto silla si todos los λ 's de $f''(x_0)$ son $\neq 0$ pero algunos positivos y otros negativos.

Otra forma de verlo es que $\det(H_{\mp}(\cdot)) < 0$.

Volviendo al problema. Evaluamos en los pto's críticos:

$$H_{\mp}(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det[H_{\mp}(0,0)] < 0$$

$\Rightarrow (0,0)$ es un pto silla

$$H_{\mp}(2,-2) = \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 > 0 \text{ def. positiva}$$

$(2,-2)$ es un mínimo local.

$$\begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12-\lambda & 6 \\ 6 & 12-\lambda \end{pmatrix}$$

$$(12-\lambda)^2 - 36$$

$$144 - 24\lambda + \lambda^2 - 36$$

$$\lambda^2 - 24\lambda + 108 = 0$$

$$\frac{24 \pm \sqrt{24^2 - 4 \cdot 108}}{2} \Rightarrow$$

$$-432$$

$$\frac{24 \pm 12}{2} \Rightarrow 18 = \lambda_1$$

$$\frac{24 \pm 12}{2} \Rightarrow 6 = \lambda_2$$

1 $f(x,y) = x^5 y + x y^5 + yx = 0$. ENCONTRE Y CLASIFIQUE
LOS PUNTOS CRÍTICOS

Sol: $\frac{\partial f}{\partial x} = 5x^4 y + y^5 + y \stackrel{!}{=} 0$
 $\frac{\partial f}{\partial y} = x^5 + 5xy^4 + x \stackrel{!}{=} 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} y(5x^4 + y^4 + 1) = 0 \\ x(5y^4 + x^4 + 1) = 0 \end{cases} \quad (x,y) = (0,0)$$

Además

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 20x^3 y & 5x^4 + 5y^4 + 1 \\ 5x^4 + 5y^4 + 1 & 20xy^3 \end{pmatrix}$$

Evaluando en el pto crítico.

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ con valores propios } \lambda = \pm 1$$

o bien $\det(H_f(0,0)) < 0$

$\Rightarrow$ Es un punto silla.

P5 ENCONTRAR LOS MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE LA FUNCIÓN

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$$

$$\text{EN } D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Sol:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 1 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 1 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow P_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in D$$

Además

$$H_F(1/2, 1/2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 2 \Rightarrow \text{def. positiva}$$

$P(1/2, 1/2)$ -mínimo local.

ya analizamos el interior de D , ahora analicemos la frontera de D . Para esto parametrizamos D .

Sea $C(t) = (\cos t, \sin t)$ $t \in [0, 2\pi)$ una parametrización de $\text{Fr}(D)$.

$$\Rightarrow \text{Sea } g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad g(t) = (f \circ C)(t)$$

$$\Rightarrow g(t) = \cos^2(t) + \sin^2(t) - \cos(t) - \sin(t) + 1$$

$$g(t) = 2 - \cos t - \sin t$$

Luego

$$g'(t) = \sin t - \cos t \stackrel{!}{=} 0 \begin{cases} \rightarrow \frac{\pi}{4} = t \\ \rightarrow \frac{5\pi}{4} = t \end{cases}$$

Ahora veamos

$$g''(t) = \cos t + \sin t$$

reemplazando

$$g''(\pi/4) > 0 \quad \text{entonces } \frac{\pi}{4} \text{ es un mínimo local.}$$

$$\therefore (x, y) = \left(\cos \frac{\pi}{4}, \sin \frac{\pi}{4} \right) \text{ es mínimo local de } f(x, y)$$

$$g''\left(\frac{5\pi}{4}\right) < 0 \Rightarrow (x, y) = \left(\cos \frac{5\pi}{4}, \sin \frac{5\pi}{4} \right)$$

es máximo local de $f(x, y)$.

Pia Fca. Feyton.