Sea

$$f:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$$
$$\left(x,y\right)\mapsto\left(1+\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sin y, 3+\frac{1}{2}e^{-x^2}\right)$$

Demostrar que f es Lipschitz.

Hint: El máximo de la función $2xe^{-x^2}$ se alcanza en $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

SOLUCION

Sean $\left(x_1,y_1\right)$ $\left(x_2,y_2\right)\in\mathbb{R}^2$

Acotemos

$$\left\|f\left(x_1,y_1\right)-f\left(x_2,y_2\right)\right\|^2=\left\|\left(1+\frac{x_1}{2}+\frac{1}{2}\sin y_1-1-\frac{x_2}{2}-\frac{1}{2}\sin y_2\right),\left(3+\frac{1}{2}e^{x_1^2}-3-\frac{1}{2}e^{x_2^2}\right)\right\|^2$$
$$=\left\|\frac{1}{2}\left(x_1-x_2+\sin y_1-\sin y_2\right),\frac{1}{2}\left(e^{x_1^2}-e^{x_2^2}\right)\right\|^2$$
$$=\frac{1}{4}\left[\left(x_1-x_2+\sin y_1-\sin y_2\right)^2+\left(e^{x_1^2}-e^{x_2^2}\right)^2\right]$$

Usamos Desigualdad de Cauchy $\left(a+b\right)^2\leq 2\left(a^2+b^2\right)$, en el primer parentesis tomamos como a=$\left(x_1-x_2\right)$ y b=$\left(\sin y_1-\sin y_2\right)$, *entonces* nos queda:

$\left(x_1-x_2+\sin y_1-\sin y_2\right)^2\leq 2\left(x_1-x_2\right)^2+2\left(\sin y_1-\sin y_2\right)^2$

$\left(e^{x_1^2}-e^{x_2^2}\right)^2$ como la desigualdad de Cauchy es para la suma entonces sumamos cero

$\left(e^{x_1^2}-e^{x_2^2}+0\right)^2$ así se toma a=$\left(e^{x_1^2}-e^{x_2^2}\right)$ y b=0 por lo tanto.

$\left(e^{x_1^2}-e^{x_2^2}\right)^2\leq 2\left(e^{x_1^2}-e^{x_2^2}\right)^2$ hacemos esto porque si lo separamos en a=$e^{x_1^2}$ y b=$-e^{x_2^2}$ *no vamos* a poder usar el hint, por lo que no podremos acotar por el maximo de la funcion exponencial.

$$\leq\frac{1}{4}\left[2\left(x_1-x_2\right)^2+2\left(\sin y_1-\sin y_2\right)^2+2\left(e^{x_1^2}-e^{x_2^2}\right)^2\right]$$

Ahora usamos Teorema del valor medio:

$$\left|\sin y_1 - \sin y_2\right| \le \cos\xi \left|y_1 - y_2\right| \text{ con } \xi \in [y_1, y_2]$$
$$\le \left|y_1 - y_2\right| \text{ usando que el maximo de } \cos\xi \text{ es } 1$$

$$\left|e^{-x_1{}^2} - e^{-x_2{}^2}\right| \le \left|2\xi e^{-\xi^2}\right| \left|x_1 - x_2\right| \qquad \xi \in [x_1, x_2] \text{ usando el hint}$$
$$\le \frac{2}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}} \left|x_1 - x_2\right|$$
$$\le 2e^{-\frac{1}{2}} \left|x_1 - x_2\right|$$

Re*capitulando*

$$\left\| f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2) \right\|^2 \le \frac{1}{2}\left[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + e^{-\frac{1}{2}} (x_1 - x_2)^2 \right]$$
$$\le \frac{1}{2}\left[\left\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\right\|^2 + e^{-\frac{1}{2}} \left\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\right\|^2 \right]$$
$$\le C \left\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\right\|^2 \text{ con k=}\sqrt{\text{C}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + e^{-\frac{1}{2}}\right)} < 1$$

Por lo tanto es contractante