Auxiliar Extra Control 1 - Cálculo en Varias Variables
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile

Profesor Cátedra: Jaime H. Ortega
Profesor Auxiliar: Matías Godoy Campbell

Pregunta 1.
Determine los valores de α para que la siguiente función sea diferenciable en $(0,0)$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|xy|^\alpha}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Pregunta 2. Pruebe las siguientes propiedades topológicas:

a) Considere la colección de abiertos $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ con Λ un conjunto arbitrario (eventualmente no numerable). Pruebe que $\displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ es un conjunto abierto. Concluya una propiedad análoga para el caso cerrado. Es posible esto para las intersecciones de abiertos?.

b) Sea A un conjunto abierto y B un conjunto cualquiera. Se define

$$A + B = \{x + y \in \mathbb{R}^n : x \in A, y \in B\}$$

Pruebe que $A + B$ es un conjunto abierto.

Pregunta 3. Sea X un conjunto no vacío:

a) Considere la siguiente métrica en X: $d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$ Pruebe que lo anterior define en efecto una métrica, además, caracterice las bolas asociadas a esta. Finalmente, deduzca si existe una norma asociada a esta métrica.

b) Pruebe que con esta métrica cualquier función $f : X \to \mathbb{R}$ es continua.

Pregunta 4. Encuentre (sin demostración) adherencia, interior y frontera de los siguientes conjuntos:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| < |x| \wedge x^2 + y^2 \leq 5\}$$

$$B = \left\{\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right) : m, n \in \mathbb{N}^*\right\} \quad C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (n, n+1)$$

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1, x^2 + y^2 < 1\}$$

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2, 0 < r < 1, r \in \mathbb{Q}\}$$

Grafique los conjuntos y decida si los mismos son abiertos, cerrados y/o compactos.

Pregunta 5.

a) Considere la superficie $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z = 0\}$. Encuentre el plano tangente a S en el punto $(0, -\pi, \pi^2)$. Además, considere la curva $\sigma(t) = (t\sin t, t\cos t, t^2)$. Muestre que σ está contenida en S y que pasa por el punto $(0, -\pi, \pi^2)$.

b) Sea $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$. y sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}(x^2 - y^2)$$

Pruebe que f es diferenciable en todo Ω y determine la ecuación del plano tangente al grafo de f para los puntos (x, y) en Ω tal que $x = y$

Pregunta 6.

a) Pruebe por definición que la siguiente función es continua en (0,0):

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\cos(y) - y\cos(x) - x + y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

b) Usando álgebra de límites pruebe que la siguiente función es continua en (0,0):

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1 + x - \cos(x^2+y^2) - \arctan(x)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

<u>Hint</u>: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \arctan x}{x^3} = \dfrac{1}{3}$

Pregunta 7.

a) Estudie continuidad, diferenciabilidad y continuidad de derivadas parciales de la siguiente función en todo su dominio:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 + \sin(y^4)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

b) Sean $f_1, \ldots, f_n : (a,b) \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables. Sea $\Omega = (a,b)^n \subset \mathbb{R}^n$ y sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$ definida por: $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x_i)$

Demuestre que f es diferenciable en Ω y que se tiene: $Df(x)(y) = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i'(x_i)y_i$

Pregunta 8. Estudie la existencia de derivadas direccionales y parciales en el origen, además de la diferenciabilidad en dicho punto de las siguientes funciones:

a)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2+xy+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

.

b)

$$g(x,y) = \begin{cases} (3x^2 - 2y^2)\cdot \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{2x^2+3y^2}}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Pregunta 9. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función, tal que $\lim\limits_{||x||\to\infty} f(x) = \infty$ (se dice que si f cumple esta condición es *coerciva*). Pruebe que si f es continua y coerciva, entonces alcanza su mínimo.
<u>Hint</u>: Recuerde que una función continua sobre un compacto alcanza su máximo y su mínimo.