

Auxiliar 2 - Cálculo en Varias Variables

Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile

14 de Agosto 2009

Profesor Cátedra: Jaime H. Ortega

Profesor Auxiliar: Matías Godoy Campbell

Pregunta 1.

- a) Pruebe que cualquier norma $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}^n$ define una función continua.
Hint: Pruebe que se tiene la siguiente desigualdad: $|||a| - |b|| \leq \|a - b\|$
- b) Pruebe que el conjunto $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ es cerrado en $\mathbb{R}^n$.

Pregunta 2.

Sea A una matriz simétrica con coeficientes reales

- a) Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^t A x$. Pruebe que $\nabla f(x) = 2(Ax)^t$
- b) Determine $\nabla g(x)$ si $g(x) = x^t x$. Compare sus resultados a los que conoce en una variable

Pregunta 3.

- a) Determine la existencia del siguiente límite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(2x) - 2x + y}{x^3 + y}$$

- b) Pruebe que la siguiente función no es diferenciable en $(0, 0)$:

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{y - x^2} & \text{si } x^2 \neq y \\ 0 & \text{si } x^2 = y \end{cases}$$

Pregunta 4.

Determine los valores de α para que la siguiente función sea diferenciable en $(0, 0)$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|xy|^\alpha}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$