Auxiliar 1 - Cálculo en Varias Variables
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile

Profesor Cátedra: Jaime H. Ortega
Profesor Auxiliar: Matías Godoy Campbell

Pregunta 1. Topología en $\mathbb{R}^n$
Pruebe las siguientes propiedades de los operadores Topológicos:

a) $int(A) \subset A$ y $A \subset Adh(A)$
b) $Adh(A \cup B) = Adh(A) \cup Adh(B)$, muestre que para $int(\cdot)$ solo se tiene una inclusión.
c) $int(A \cap B) = int(A) \cap int(B)$, muestre que para $Adh(\cdot)$ solo se tiene una inclusión.

Pregunta 2. Sean A, $B \subset X$ conjuntos no vacíos

a) Pruebe que $Fr(A \cup B) \subset Fr(A) \cup Fr(B)$. Encuentre un contraejemplo para la otra inclusión
b) Supongamos que A es cerrado. Pruebe que $Fr(A) \subset A$
c) Sean ahora A y B conjuntos cerrados, tales que $A \cap B = \emptyset$, entonces:

$$Fr(A \cup B) = Fr(A) \cup Fr(B)$$

Pregunta 3.

a) Pruebe que la bola abierta $B(x_0, R) = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x_0 - x|| < R\}$ es, en efecto, un conjunto abierto
b) Pruebe que $Adh(B(x_0, R)) = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x_0 - x|| \leq R\}$

Pregunta 4. Determine si existen los siguientes límites

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 \sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ <u>Hint:</u> Use coordenadas Polares
a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$
c) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2yz}{x^4+x^2y^2+z^4}$
d) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2yz}{\sqrt{x^{12}+y^6+z^4}}$ <u>Hint:</u> Recuerde que la media geométrica es siempre menor o igual a la aritmética.

Pregunta 5. Sea X un conjunto no vacío, denotamos por $\mathbb{R}^X$ al espacio de funciones $f : X \to \mathbb{R}$ definimos en este espacio la siguiente distancia:

$$d(f,g) = \sup_{x \in X} \frac{|f(x)-g(x)|}{1+|f(x)-g(x)|}$$

Pruebe entonces lo siguiente:

a) $(\mathbb{R}^X, d)$ es un espacio métrico. Para la desigualdad triangular pruebe lo siguiente:
a.i) $0 \leq x \leq y \Rightarrow \frac{x}{1+x} \leq \frac{y}{1+y}$ <u>Hint</u>: considere $f(t) = \frac{t}{1+t}$
a.ii) $\frac{x+y}{1+x+y} \leq \frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y} \quad \forall\, x, y \geq 0$
b) Una sucesión $\{f_n\} \subset \mathbb{R}^X$ satisface $d(f_n, f) \to 0$ con $f \in \mathbb{R}^X$ si y solo si $\{f_n\}$ converge uniformemente a f.