Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Algebra Lineal 09-2

Clase Auxiliar # 15

Profesor: Alejandro Maass
Auxiliares: Sebastián Donoso F. & César Vigouroux.

P1. (a) Considere la cónica

$$-3y^2 + 4xy - \frac{12}{\sqrt{5}}x + \frac{14}{\sqrt{5}}y = 7$$

(i) Identifique la cónica antes descrita y haga un bosquejo de ella.

(ii) Es la matriz asociada a la cónica anterior definida positiva?.

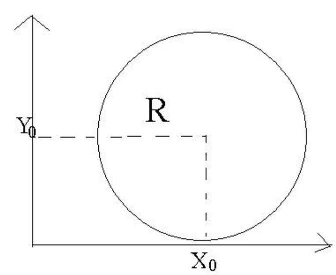
(b) Sea $A \in M_{nxn}(\mathbb{R})$ una matriz simétrica cuyos valores propios son $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 1$ y $\lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_n = 0$ con $0 < k < n$, y su descomposición es $A = PDP^t$ con $P \in M_{nxn}(\mathbb{R})$ matriz ortogonal y D la matriz diagonal de valores propios.

(b.i) Sea $z = P^t x$ y $x \in \mathbb{R}^n$, probar que $||Ax||^2 = ||Dz||^2$ y que $||x||^2 = ||z||^2$. Concluir que para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $||Ax||^2 \leq ||x||^2$.

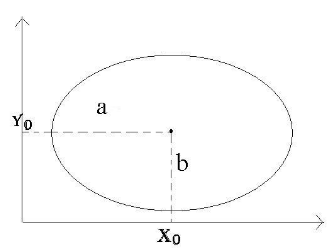
(b.ii) Probar que existe $x_0 \in \mathbb{R}^n \; \{0\}$ tal que $||Ax_0||^2 = ||x_0||^2$.

Recuerdo:

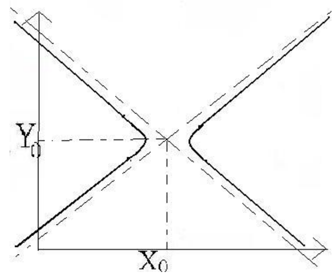
(1) $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$: Ecuación de una circunferencia de centro (x_0, y_0) y radio R.



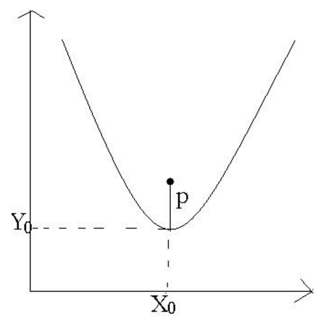
(2) $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$: Ec de una elipse de centro (x_0, y_0) y semiejes a y b.



(3) $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$: Ec de una hiprbola de centro (x_0, y_0) y semiejes a y b.



(4) $y - y_0 = 4p(x - x_0)^2$: Ec de una parábola con vértice en (x_0, y_0) y distancia p del vértice al foco (o a la directriz).



P2. Sea $A \in M_{nxn}(\mathbb{R})$ simétrica.

(i) Probar que $v \in \mathbb{R}^n$ es vector propio de A si y sólo si es vector propio de $I - A$. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ es valor propio de A asociado a v.Cuál es el valor propio de $I - A$ asociado a v?.

(ii) Probar que la matriz $I - A$ es definida positiva si y sólo si todos los valores propios de A son menores estrictos que uno.

P3. (a) Considere la cónica de ecuación $5x^2 + 5y^2 + 6xy + 16x + 16y = -15$. Realice el cambio de variable que permite escribir la cónica de manera centrada y escriba la nueva expresión (escriba explícitamente el cambio de variables). Identifique la cónica resultante y dibújela.

(b) Encontrar los valores de los parámetros α y $\beta \in \mathbb{R}$ tales que la matriz siguiente sea definida positiva.

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \beta \end{pmatrix}$$