

MA1101-06 Semestre Primavera 2009**Profesor:** Alejandro Maass **Auxiliar:** Sebastián Donoso & César Vigouroux

Auxiliar # 14

Lunes 9 de noviembre

P1.

- (a) i) Sean $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, con A invertible. Muestre que si λ es valor propio de AB , entonces λ es valor propio de BA .
- ii) Sea $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ una matriz diagonalizable y tal que $A^k = 0$ para cierto $k \in \mathbb{N}$. Encuentre A explícitamente (justifique).
- iii) Sean $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ matrices diagonalizables y con igual base de vectores propios $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son los valores propios de A y $\mu_1, \dots, \mu_n$ los de B , ie, $Av_i = \lambda_i v_i$ y $Bv_i = \mu_i v_i, \forall i \in \{1, \dots, n\}$, encuentre los valores propios de $A^3 + 2B$.
- (b) Sea $A = PDP^{-1} \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ con D diagonal, P invertible. Suponga que 1 y -1 NO son valores propios de A . Demuestre que para todo $k \in \mathbb{N}$ la matriz

$$B = I + A + \dots + A^k = \sum_{i=0}^k A^i$$

es invertible y determine explícitamente su inversa.

P2.

- (a) Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Encuentre su diagonalización de la forma $A = PDP^t$

- (b) Sea $M \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ simétrica y $\{z_1, \dots, z_n\}$ una base ortogonal de $\mathbb{R}^n$ de vectores propios de M , asociados a los valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ respectivamente. Pruebe que $\{z_1, \dots, z_n\}$ es también una base ortogonal de vectores propios de la matriz

$$C = M + z_1 z_1^t$$

Determine además los valores propios asociados.

P3.

(a) Sea U el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ generado por:

$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- i) Determine una base ortonormal de U .
 - ii) Determine una base ortonormal de $U^\perp$.
- (b) Sean $V, W \subseteq \mathbb{R}^n$ subespacios vectoriales. Sean además P_V, P_W las proyecciones ortogonales sobre V y W , respectivamente. Suponga que $P_V \circ P_W = P_W \circ P_V$.
- i) Pruebe que $P_W(V) \subseteq V$
 - ii) Sea $z \in V^\perp$. Pruebe que $P_V(P_W(z)) = 0$
 - iii) Concluya que $P_W(V^\perp) \subseteq V^\perp$