MA1101-06 Semestre Primavera 2009

Profesor: Alejandro Maass **Auxiliar:** Sebastián Donoso & César Vigouroux

Auxiliar # 10

Jueves 8 de octubre

P1. Sea $\mathcal{P}_k$ el e.v. de los polinomios de grado menor o igual a $k \in \mathbb{N}$ a coeficientes reales. Sea $D : \mathcal{P}_k \longmapsto \mathcal{P}_{k-1}$ definida por $D(p) = p',\ \forall p \in \mathcal{P}_k$, donde p' es la derivada de p.

(i) Pruebe que D es una transformación lineal.

(ii) Encuentre una base de $ker(D)$ y dé la dimensión de $ker(D)$ (nulidad de D).

(iii) Encuentre una base de $Im(D)$ y dé la dimensión de $Im(D)$ (rango de D).

(iv) Estudie la inyectividad y epiyectividad de D.

P2. a) Sea $\mathcal{P}_k$ igual que en P1. Sea $L : \mathcal{P}_2 \longmapsto \mathcal{P}_4$ definida por:
$L(p)(x) = p(x)(x^2 + 1),\ \forall p \in \mathcal{P}_2\ \forall x \in \mathbb{R}$.

(i) Pruebe que L es una transformación lineal.

(ii) Encuentre una base de $ker(L)$ e $Im(L)$ y dé sus dimensiones.
Sea $V = Im(L)$.

(iii) Pruebe que $\mathcal{P}_1 \cap V = \{0\}$

(iv) Calcule $dim(\mathcal{P}_1 \oplus V)$ y deduzca que $\mathcal{P}_1 \oplus V = \mathcal{P}_4$

b) Sean U, V subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$. Pruebe que

$$(U + V)^\perp = U^\perp \cap V^\perp$$

P3. a) Sea $T : M_{2,3}(\mathbb{R}) \to M_{2,2}(\mathbb{R})$ tal que:

$$T(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}+a_{21}}{2} \\ \frac{a_{12}+a_{21}}{2} & a_{22} \end{pmatrix}$$

(i) Demuestre que T es lineal.

(ii) Encontrar bases y dimensión de $\ker(T)$ e $Im(T)$.

b) Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ lineal tal que

$$\ker f = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle \quad \text{y } f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(i) Indicar $\dim \ker(f)$ y base de $\ker(f)$.
(ii) Encuentre $f(x)$ para $x \in \mathbb{R}^3$.
(iii) Encuentre base de Imf.
(iv) Estudie la inyectividad y epiyectividad de f.