



CLASE AUXILIAR # 9

Profesor: Alejandro Maass

Auxiliares: Sebastián Donoso F. & César Vigouroux.

P4. Sean E, F, G e.v sobre K , $f : E \rightarrow F$, $g : F \rightarrow G$ aplicaciones lineales.(i.1) Demuestre que $\text{Ker}(g \circ f) = f^{-1}(\text{Ker } g \cap \text{Im } f)$.(i.2) Suponga que $E = F = G$, demuestre que si f y g conmutan ($g \circ f = f \circ g$) se tiene:

$$f(\text{Ker } g) \subseteq \text{Ker } g, \quad f(\text{Im } f) \subseteq \text{Im } g.$$

(ii) Supongamos que E, F, G son de dimensión finita n, p, q respectivamente. Demuestre que:

$$r(f) + r(g) - p \leq r(g \circ f) \leq \min(r(f), r(g))$$

Nota : $r(h) = \dim(\text{Im } h)$, para h una transformación lineal.**Solución:**

(i.1) $x \in \text{Ker}(g \circ f) \Leftrightarrow g \circ f(x) = 0 \Leftrightarrow g(f(x)) = 0 \Leftrightarrow f(x) \in \text{Ker } g \Leftrightarrow f(x) \in \text{Ker } g \wedge f(x) \in \text{Im } f \Leftrightarrow x \in f^{-1}(\text{Ker } g \cap \text{Im } f)$ Podríamos haber llegado a $x \in f^{-1}(\text{Ker } g)$ y luego haber argumentado que $f^{-1}(\text{Ker } g) = f^{-1}(\text{Ker } g \cap \text{Im } f)$ puesto que para cualquier función $h : A \rightarrow B$ se tiene $f^{-1}(C) = f^{-1}(C \cap \text{Im } f) \forall C \subseteq B$.

(i.2)

• $f(\text{Ker } g) \subseteq \text{Ker } g$. Sea $y \in f(\text{Ker } g) \Leftrightarrow \exists x \in \text{Ker } g$ tal que $y = f(x)$. Queremos probar $y \in \text{Ker } g$ (i.e) $g(y) = 0$. En efecto $g(y) = g(f(x)) = f(g(x))$, pues por hipótesis f y g conmutaban. Como $x \in \text{Ker } g \Leftrightarrow g(x) = 0$, luego $f(g(x)) = f(0) = 0$ esta última igualdad cumpliéndose por ser f lineal. En consecuencia $g(y) = 0$ y entonces $y \in \text{Ker } g$.

• $f(\text{Im } g) \subseteq \text{Im } g$. Sea $y \in f(\text{Im } g) \Leftrightarrow \exists x \in \text{Im } g$ tal que $y = f(x)$. Como $x \in \text{Im } g, \exists t \in F$ tal que $x = g(t)$. Luego $y = f(g(t)) = g(f(t))$ i.e $y \in \text{Im } g$.

(ii)

• $r(f) + r(g) - p \leq r(g \circ f)$. Por TNI (Teorema núcleo imagen) tenemos

$$\begin{aligned} r(f) &= \dim(\text{Im } f) = n - \dim(\text{Ker } f) \\ r(g) &= \dim(\text{Im } g) = p - \dim(\text{Ker } g) \\ r(g \circ f) &= \dim(\text{Im}(g \circ f)) = n - \dim(\text{Ker}(g \circ f)) \end{aligned}$$

de donde obtenemos $r(f) + r(g) - p = n - \dim(\text{Ker } f) - \dim(\text{Ker } g)$ Con esto, notamos que la desigualdad que queremos probar es equivalente a

$$\begin{aligned} n - (\dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Ker } g)) &\leq n - \dim(\text{Ker}(g \circ f)) \Leftrightarrow \\ \dim(\text{Ker}(g \circ f)) &\leq \dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Ker } g) \end{aligned}$$

Probemos esto último. Sea $r = \dim(\text{Ker } f)$, $q = \dim(\text{Ker } g \cap \text{Im } f) \leq \dim(\text{Ker } g)$. Tomemos $\{y_1, \dots, y_r\}, \{x_1, \dots, x_q\}$ bases de $\text{Ker } g \cap \text{Im } f$ y $\text{Ker } f$ respectivamente. Veremos que una base de $\text{Ker}(g \circ f)$ tiene a lo más $r + q$ elementos. Notemos primero que para cada y_i en la base de

$Ker g \cap Im f$, $\exists t_i \in E$ tal que $f(t_i) = y_i$ (esto pues los $y_i \in Im f$) Sea $x \in Ker(g \circ f) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(Ker g \cap Im f)$ (parte(i)) $\Leftrightarrow f(x) \in (Ker g \cap Im f) \Rightarrow f(x) = \alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_r y_r$ para ciertos $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathcal{K}$. Así, $f(x) = \alpha_1 f(t_1) + \dots + \alpha_r f(t_r) \Leftrightarrow f(x - (\alpha_1 t_1 + \dots + \alpha_r t_r)) = 0$ y así $x - (\alpha_1 t_1 + \dots + \alpha_r t_r) = \beta_1 x_1, \dots, \beta_q x_q$ (porque está en el $Ker f$) para ciertos $\beta_i \in \mathcal{K}$. De aquí se concluye $x = \alpha_1 t_1 + \dots + \alpha_r t_r + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_q x_q$ es decir $Ker(g \circ f) \subseteq \langle t_1, \dots, t_r, x_1, \dots, x_q \rangle$. Así de ese conjunto se puede extraer una base de $Ker(g \circ f)$ y por supuesto tendrá a lo más $r + q$ elementos.

• $r(g \circ f) \leq \min(r(f), r(g))$. Probemos que simultáneamente se tiene $r(g \circ f) \leq r(f)$ y $r(g \circ f) \leq r(g)$. Para la primera desigualdad, basta notar que $f(E) \subseteq F$, con lo cual $g(f(E)) \subseteq g(F)$ y esto implica que $r(g \circ f) = \dim(Im(g \circ f)) \leq \dim(Im g) = r(g)$. Para la segunda, notemos que $Ker(f) \subseteq Ker(g \circ f)$ (Compruébelo ud mismo!). De aquí se deduce $\dim(Ker f) \leq \dim(Ker(g \circ f))$ y por TNI $n - \dim(Im f) = \dim(Ker f) \leq \dim(Ker(g \circ f)) = n - \dim(Im(g \circ f))$ lo cual implica $r(g \circ f) = \dim(Im(g \circ f)) \leq \dim(Im f) = r(f)$. ■