Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Algebra Lineal 09-2

Clase Auxiliar # 9

Profesor: Alejandro Maass
Auxiliares: Sebastián Donoso F. & César Vigouroux.

P1. Sea $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ el conjunto de los polinomios de grado menor o igual a 3 con coeficientes reales. Se define la transformación $T : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ por:

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = a_0 + (2a_1 + a_2)x + (2a_2 + a_3)x^2 + 2a_3x^3$$

(a) Probar que T es una transformación lineal.

(b) Probar que T es una transformación biyectiva.

(c) Si id es la transformación identidad del espacio vectorial $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ pruebe que $T-2id$, $(T-2id)^2$, $(T-2id)^3$ y $T-id$ son tranformaciones lineales.

(d) Encontrar bases y dimensión de $Ker(T-2id)$, $Ker(T-2id)^2$ y $Ker(T-2id)^3$.

(e) Probar que $\mathcal{P}_3(\mathbb{R}) = Ker(T-2id)^2 \oplus Ker(T-id)$.

P2. Considere la aplicación $T : M_{2x3} \to M_{2x2}$ definida por:

$$T(\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}$$

(a) Pruebe que T es una aplicación lineal.

(b) Determine bases del núcleo e imagen de T.

(c) Determine si T es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva.

P3. Sea $T : V \to V$ una aplicación lineal con V espacio vectorial de dimensión finita.
Demuestre que:

$$V = Ker(T) \oplus Im(T) \Leftrightarrow Ker(T^2) = Ker(T).$$

P4. Sean E, F, G e.v sobre K, $f : E \to F$, $g : F \to G$ aplicaciones lineales.

(i.1) Demuestre que $Ker(g \circ f) = f^{-1}(Kerg \cap Imf)$.

(i.2) Suponga que $E = F = G$, demuestre que si f y g conmutan ($g \circ f = f \circ g$) se tiene:

$$f(Kerg) \subseteq Kerg \ , \ f(Imf) \subseteq Img.$$

(ii) Supongamos que E, F, G son de dimensión finita n, p, q respectivamente. Demuestre que:

$$r(f) + r(g) - p \le r(g \circ f) \le min(r(f), r(g))$$

$Nota : r(h) = dim(Imh)$, para h una transformación lineal.