Clase Auxiliar # 8

Profesor: Alejandro Maass
Auxiliares: Sebastián Donoso F. & César Vigouroux.

P1. (i) Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathcal{K}$. En $E \times E$ se definen las siguientes operaciones

$$(u,v)+(u',v')=(u+u',v+v')$$
$$\lambda(u,v)=(\lambda u,\lambda v)$$

(a) Pruebe que $E \times E$ con las operaciones anteriores, es un espacio vectorial sobre $\mathcal{K}$.

(b) Considere los conjuntos:
$\Delta = \{(u,v) \in E \times E \ / u = v\}$
$\bar{\Delta} = \{(u,v) \in E \times E / u = -v\}$
Pruebe que Δ y $\bar{\Delta}$ son subespacios vectoriales de $E \times E$

(ii) Sea V e.v sobre $\mathcal{K}$ y U, W s.e.v de V. Demuestre que $U \cup W$ es s.e.v de $V \Leftrightarrow$ $(U \subseteq W) \vee (W \subseteq U)$.Deduzca que $U \neq V \wedge W \neq V \Rightarrow U \cup W \neq V$.

P2. Determinar una base del subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores:

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$$

dar su dimensión y extenderla a una base de $\mathbb{R}^4$.

P3. Considere los siguientes subconjuntos de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$:
$W_1 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \ / \ f \text{ es par}\} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \ / \ f(x) = f(-x) \ \forall x \in \mathbb{R}\}$.
$W_2 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \ / \ f \text{ es impar}\} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \ / \ f(x) = -f(-x) \ \forall x \in \mathbb{R}\}$.

(i)Demuestre que W_1 y W_2 son subespacios vectoriales de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
(ii)Demuestre que $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = W_1 \oplus W_2$.