

MA1101 Semestre Primavera 2009**Profesor:** Alejandro Maass **Auxiliares:** Sebastián Donoso - César Vigouroux**Auxiliar # 7**

Lunes 21 de septiembre

- P1.** (a) Sea $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Sea $T_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definida por $T_A(x) = Ax, \forall x \in \mathbb{R}^n$.
- (i) Pruebe que $T_A(\mathbb{R}^n)$ es un s.e.v. de $\mathbb{R}^m$.
 - (ii) Sea $m = n$, y considere A invertible. Para $k \in \{1, \dots, n\}$, Pruebe que: $\{u_1, \dots, u_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ es l.i. $\Rightarrow \{T_A(u_1), \dots, T_A(u_k)\} \subseteq \mathbb{R}^n$ es l.i.
- (b) Considere el plano $\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 0\}$
- (i) Encuentre la ecuación vectorial o paramétrica de π .
 - (ii) Pruebe que $\{d_1, d_2\}$, con d_1 y d_2 los vectores directores que encontró en la parte (i), es un conjunto linealmente independiente.
 - (iii) Pruebe que π es un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$
- P2.** Sea $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ el e.v. de las matrices de 2×2 a coeficientes reales. Considere los siguientes subconjuntos de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$: $W_1 = \{A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : A_{11} + A_{12} + A_{21} + A_{22} = 0\}$, $W_2 = \{A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : A_{11} + A_{22} = 0\}$.
- (a) Pruebe que W_1 y W_2 son s.e.v. de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.
 - (b) Encuentre una base para W_1 y W_2 y dé su dimensión.
 - (c) Encuentre una base para $W_1 \cap W_2$ y dé su dimensión.
 - (d) Dé la dimensión de $W_1 + W_2$.
- P3.** Sea $n \in \mathbb{N}$. Para un intervalo $[a, b) \subseteq [0, n)$, con $a, b \in \mathbb{N}$, definimos la función $\mathbb{1}_{[a,b)}$ indicatriz de $[a, b)$ por:

$$\mathbb{1}_{[a,b)}(x) := \begin{cases} 1, & x \in [a, b) \\ 0, & x \notin [a, b) \end{cases}$$

Sea $F([0, n), \mathbb{R})$ el e.v. de las funciones del intervalo $[0, n)$ en $\mathbb{R}$. Definimos $E \subseteq F([0, n), \mathbb{R})$ como el conjunto de las funciones constantes por pedazos de largos enteros, es decir:

$$f \in E \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}, \exists \lambda_i \in \mathbb{R} : \forall x \in [0, n), f(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbb{1}_{[i-1, i)}(x)$$

- a) Pruebe que $\forall a, b \in \mathbb{N}$ tal que $[a, b) \subseteq [0, n)$, $\mathbb{1}_{[a,b)} \in E$.

- b) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ una constante y $f \in E$. Pruebe que $\alpha f \in E$.
- c) Pruebe que E es un s.e.v de $F([0, n), \mathbb{R})$.
- d) Pruebe que el conjunto de funciones $B := \{\mathbb{1}_{[0,1)}, \dots, \mathbb{1}_{[n-1,n)}\}$ es l.i.
- e) Encuentre una base de E .
- f) Encuentre un isomorfismo T de E en $\mathbb{R}^n$, y explicita $T(\mathbb{1}_{[a,b)})$.