Clase Auxiliar # 6

Profesor: Alejandro Maass
Auxiliares: Sebastián Donoso F. & César Vigouroux.

P1. Sean E, F e.v sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Sea T una función $T : E \to F$, que satisface:

(1) $T(0_E)$=0_F. Donde 0_E y 0_F son los neutros aditivos en cada e.v.

(2) $\forall x \in E$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$: $T(\alpha x) = \alpha T(x)$.

(3) $\forall x, y \in E$ $T(x + y) = T(x) + T(y)$.

Considere:

$$T(E) = \{y \in F \; | y = T(x), \, x \in E\}$$

(a) Muestre que $T(E)$ es un s.e.v de F.

(b) Suponga además que T satisface que:

$$\forall x \in E \; T(x) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Muestre que si $\{u_1, \ldots, u_n\} \subseteq E$ es l.i, entonces $\{T(u_1), \ldots, T(u_n)\} \subseteq F$ es l.i.

(c) Supongamos $E = F$. Sea $x_o \in E$ tal que $T^m(x_0) = 0$, $T^{m-1}(x_0) \neq 0$ para algún entero positivo m. Muestre que $x_0, T(x_0), \ldots, T^{m-1}(x_0)$ son linealmente independientes.

Nota: $T^m(x_0) = T(T \ldots T(x_0))$ (la composición de T m veces) .

P2. Sean $p \in \mathbb{R}^3$ y $D \neq 0 \in \mathbb{R}^3$. Se define: $L = \{x \in \mathbb{R}^3 / (x - p) \times D = 0\}$

(i) Pruebe que $L = \{x \in \mathbb{R}^3 / x = P + \lambda D, \lambda \in \mathbb{R}^3\}$.

(ii) Sean $D \neq 0$, $B \neq 0$ vectores en $\in \mathbb{R}^3$. Qué condiciones deben satisfacer D y B para que la recta $L = \{x \in \mathbb{R}^3 / (x - p) \times D = 0\}$ y el plano $\Pi = x \in \mathbb{R}^3 / < x, B >= 0$ se intersecten.

P3. (i) Pruebe que el conjunto de polinomios reales

$$\{1, (x-1), (x-1)(x-2), (x-1)(x-2)(x-3), \ldots, \prod_{k=1}^{n}(x-k)\}$$

es l.i

(ii) Sean a, b, c tres vectores de un espacio vectorial V . Determine si el conjunto $\{a+b, b+c, c+a\}$ es un conjunto l.i.