Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Algebra Lineal 09-2

Problema adicional

Profesor: Alejandro Maass
Auxiliares: Sebastián Donoso F. & César Vigouroux.

P1. Sean los planos $d_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $d_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ vectores en $\mathbb{R}^3$

(i) Determine la ecuación cartesiana del plano Π_0, cuyos directores son d_1 y d_2, y que pasa por el origen.

(ii) Dada la recta L definida por: $x+y+z=4$ y $2x-z=2$, determine el vector $P_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix} \in L$

(iii) Encuentre el plano Π_0' paralelo a Π_0 y que contiene a P_0.

Solución:

(i) En clase auxiliar vimos cómo pasar de la ecuación cartesiana de un plano (o recta) a su ecuacin paramétrica. En esta parte nos piden el proceso contrario: pasar de la ecuación paramétrica a la ecuacin cartesiana. Recuerden que cuando pasamos de la cartesiana a la paramétrica , lo hacíamos describiendo los puntos x, y, z que satisfacían las ecuaciones a través de algún parámetro (2 parmetros si era un plano y 1 si era una recta). El proceso de pasar de la paramétrica a la cartesiana es exactamente el inverso: buscaremos eliminar los parámetros y encontrar las relaciones entre x, y, z.

En forma paramétrica: $\Pi_0 : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{t} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{s} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Esto es, los puntos $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ del plano satisfacen $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \text{t} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{s} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ s,t $\in \mathbb{R}$

Escribiendo las ecuaciones queda:

$$x = s$$

$$y = 4t + 2s$$

$$z = 0$$

Como se trata de un plano, debemos llegar a **una** ecuación que sea del estilo $ax+by+cz+d = 0$. Viendo las ecuaciones obtenidas resulta de inmediato que el plano es

Π_1=$\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$.(toda la informacin sobre el plano estaba en la ltima ecuacin).

En este ejemplo no resulta muy claro el procedimiento. Cambiemos el vector d_1 por

$\tilde{d_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Obtengamos la ecuación cartesiana del plano que pasa por el origen y tiene vectores directores $\tilde{d_1}$ y d_2. Tenemos, $\tilde{\Pi_0}: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{t}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{s}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ Esto es :

$$(1) : x = s$$

$$(2) : y = 4t + 2s$$

$$(3) : z = t$$

(1) y (3) en (2) $\Rightarrow y = 4z + 2x$. Luego, la ecuación del plano $\tilde{\Pi_0}$ es $2x + 4z - y = 0$.

(ii) Queremos determinar α y β tales que $P_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix} \in L$. Basta reemplazar z=1 en las 2 ecuaciones cartesianas que definen a la recta y se obtiene $\alpha = 3/2$ y $\beta = 3/2$

(iii) 2 planos son paralelos si los vectores directores de uno sirven como vectores directores del otro (es decir es el mismo plano pero trasladado). Esto se enuncia diciendo que los vectores directores de uno se pueden escribir en funcin de los del otro y viceversa i.e existe una matriz $A \in M_{2x2}(\mathbb{R})$ invertible tal que $[d_1|d_2]$=$[d_1'|d_2']$A (Traspongan esto si no es claro verlo) .En nuestro caso, queremos encontrar Π_0' paralelo a Π_0 y que contenga a P_0. Nos basta elegir los mismos vectores de Π_0 e imponer que pase por P_0.

Así, $\Pi_0' : \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{t}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{s}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ■