Clase Auxiliar # 4

Profesor: Alejandro Maass
Auxiliares: Sebastián Donoso F. & César Vigouroux.

P3. (i) Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ se define el trazo entre x e y por $[x, y]=\{\lambda x + (1-\lambda)y/0 \leq \lambda \leq 1\}$. Demuestre que si $\|x-y\| = \|x-z\| + \|z-y\|$ entonces $z \in [x, y]$. Interprete en $\mathbb{R}^2$. Sea el sistema lineal $Ax = b$. Suponga que x e y son solución del problema. Qué ocurre con $z \in [x, y]$?.

(ii) Pruebe que $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$(esta identidad se conoce como "identidad del paralelógramo").Interprete en $\mathbb{R}^2$.

Sol:

(i) Recordemos que $||x||^2 =< x, x >$. Por bilinealidad también tenemos que

$||u-v||^2 =< u-v, u-v >=< u-v, u > - < u-v, v >=< u, u > - < v, u > - < u, v > + < v, v >$.

Además como $< u, v >=< v, u >$ concluimos que $||u-v||^2 = ||u||^2 - 2 < u, v > +||v||^2$ (Similar a la fórmula del cuadrado de binomio). Para resolver (i), elevemos la igualdad que nos dan al cuadrado (obviamente supongamos $x \neq y$). Obtenemos:

$$\|x-y\|^2 = \|x-z\|^2 + 2\|z-y\|\|x-z\| + \|z-y\|^2$$

Reemplazando lo antes dedudico llegamos a:

$$||x||^2-2 < x, y > +||y||^2 = ||x||^2-2 < x, z > +||z||^2+2\|z-y\|\|x-z\|+||z||^2-2 < z, y > +||y||^2$$

Cancelando términos y reagrupando llegamos a:

$$-2 < x, y > +2 < x, z > +2 < z, y > -2||z||^2 = 2\|z-y\|\|x-z\|$$

$$\Leftrightarrow \qquad - < x, y > + < x, z > + < z, y > - < z, z >= \|z-y\|\|x-z\|$$

$$\Leftrightarrow \qquad < x, z-y > + < z, y-z >= \|z-y\|\|x-z\|$$

Recordando que $< u, -v >=< -u, v >$, llegamos a

$$< x, z-y > + < -z, z-y >= \|z-y\|\|x-z\|$$

$$\Leftrightarrow \qquad < x-z, z-y >= \|z-y\|\|x-z\|$$

Ahora recordemos la desigualdad de Cauchy-Swartz :$| < u, v > | \leq ||u||||v||$, teniéndose la igualdad ssi u y v son paralelos. (también se puede ver eso de la fórmula $| < u, v > | = ||u||||v||cos(\theta)$). Notamos que llegamos justo a una expresión de ese tipo en la desigualdad anterior. Concluimos entonces que $x-z$ y $z-y$ son paralelos, es decir, existe $\alpha \neq 0$ tal que $x-z = \alpha(z-y)$ (Como en la pregunta nos dicen probar que $z \in [x, y]$ podemos suponer que $x \neq z$ y $y \neq z$, sino el problema estaría listo. Además como $x \neq y$, $\alpha \neq 1$). Reemplazando entonces en la ecuación precendente queda:

$$< \alpha(z-y), z-y >= \|z-y\|\|x-z\|$$

$$\alpha||z-y||^2 = \|z-y\|\|x-z\|$$

De aquí obtenemos $\alpha = \frac{||x-z||}{||z-y||}$(i.e $\alpha > 0$). Además de $x - z = \alpha(y-z)$, podemos despejar $z = \frac{x}{\alpha+1} + \frac{\alpha y}{\alpha+1}$, i.e $z \in [x, y]$ (con $\lambda = \frac{1}{\alpha+1} \in [0,1]$).

Si suponemos que x e y resuelve el sistema $Ax = b$, entonces notemos que todo $z \in [x, y]$ lo resuelve (de hecho , todo vector z en la recta que une x e y lo resolverá). En efecto $Az = A(\lambda x) + A(1-\lambda)y = \lambda b + (1-\lambda)b = b$.

(ii) De una observación hecha anteriormente : $||x+y||^2 = ||x||^2 - 2 < x, y > +||y||^2$ y $||x-y||^2 = ||x||^2 - 2 < x, y > +||y||^2$. Sumando ambas expresiones se llega al resultado. Interprete ud en $\mathbb{R}^2$