Algebra lineal
Profesor: Alejandro Maass
Auxiliares: Sebastián Donoso F. & César Vigouroux

P.- *Obtenga la descomposición LU de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & 7 \\ 2 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

En base a la descomposición anterior resuelva $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Solución:

*La descomposición **LU** de una matriz consiste en expresarla como el producto de una matriz triangular inferior (**L**ower triangular matrix) y una matriz triangular superior (**U**pper triangular matrix)*

*La estrategia consiste en escribir la matriz A aumentada con la identidad y escalonarla hasta transformarla en una triangular superior. Debemos ser cuidadosos en **sólo** usar matrices de elementales de suma en este proceso (esto debido a que éstas son todas matrices triangulares inferiores, y en consecuencia el producto también lo es y luego inversa de este producto también. Las matrices de permutación **no** son triangulares inferiores, por ello desechamos su uso en este método). Con el objetivo de poder expresar L y U con unos en sus diagonales(**), se optará por sólo usar matrices de suma de la forma* $E_{pq}(\beta,1)$ *i.e no multiplicaremos la fila en donde queramos dejar un cero.*

Escribamos la matriz aumentada con la identidad (para guardar la matriz por la que se multiplicó a A para dejarla triangular superior) y escalonémosla.

$$(A\,|\,I) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 10 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{17}{4} & \frac{11}{2} & -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{17}{2} & -2 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{17}{4} & \frac{11}{2} & -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -13 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Hasta aquí ya hemos obtenido una matriz triangular superior en donde estaba A.

Lo que hicimos fue $EA = U$*, donde U es la matriz que quedó en la posición donde estaba A. E es la matriz por la que se multiplicó a A para transformarla en U, luego E quedó guardada donde estaba la identidad. Como E es producto es matrices elementales de suma, es triangular inferior e invertible, denotemos* $L = E^{-1}$ *(L es triangular inferior por serlo E). Con eso EA=U, ssi* $A = E^{-1}U = LU$*, donde L es triangular inferior y U triangular superior, obteniéndose lo pedido. Ya tenemos U, falta calcular L (basta invertir E).*

Copiamos E aumentada con la identidad y calculamos su inversa.

$$(E\,|\,I)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ -\frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ \textit{escalonando..}\ \rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 2 & 1\end{pmatrix},\ \textit{con esto obtenemos}\ E^{-1}=L=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{1}{4} & 1 & 0\\ \frac{1}{2} & 2 & 1\end{pmatrix}$$

Y en consecuencia tenemos:

$$A=LU=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{1}{4} & 1 & 0\\ \frac{1}{2} & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 3 & 6\\ 0 & \frac{17}{4} & \frac{11}{2}\\ 0 & 0 & -13\end{pmatrix}\ \blacksquare$$

*Con esta descomposición se nos pide resolver el sistema **Ax=b**.*
Ax=b** ssi **LUx=b.
Resolvemos el sistema en 2 pasos.
***(1)**Hacemos y=Ux , transformándose el problema en resolver Ly=b.*
Pero L es triangular inferior así que podemos resolver el problema de inmediato despejando las variables y reemplazándolas en las ecuaciones.

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{1}{4} & 1 & 0\\ \frac{1}{2} & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 2\end{bmatrix}.$$

Este sistema es
$$\begin{aligned}y_1&=1\\ \tfrac{1}{4}y_1+y_2&=-1\\ \tfrac{1}{2}y_1+2y_2+y_3&=2\end{aligned}$$

De donde se obtiene, $y_1=1,\ y_2=-\frac{5}{4},\ y_3=4$

***(2)** Recordamos Ux=y y resolvemos el sistema*

$$\begin{pmatrix}4 & 3 & 6\\ 0 & \frac{17}{4} & \frac{11}{2}\\ 0 & 0 & -13\end{pmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -\frac{5}{4}\\ 4\end{bmatrix}$$

Y este sistema es
$$\begin{aligned}-13x_3&=4\\ \tfrac{17}{4}x_2+\tfrac{11}{2}x_3&=-\tfrac{5}{4}\\ 4x_1+3x_2+6x_3&=1\end{aligned}$$

De donde se obtiene $x_3=-\frac{4}{13},\quad x_2=\frac{23}{221},\quad x_1=\frac{140}{221}$

Luego:

$$x=\begin{bmatrix}\frac{140}{221}\\ \frac{23}{221}\\ -\frac{4}{13}\end{bmatrix}\ \blacksquare$$

***Obs**: Ya teniendo la descomposición LU de A, de manera sencilla podemos obtener su descomposición LDU.*

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\ \frac{1}{4}&1&0\\ \frac{1}{2}&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&3&6\\ 0&\frac{17}{4}&\frac{11}{2}\\ 0&0&-13\end{pmatrix}$$ *, generamos una matriz diagonal entre L y U "factorizando" U para que quede con 1s en su diagonal. En nuestro caso, no es difícil ver que*

$$U=\begin{pmatrix}4&0&0\\ 0&\frac{17}{4}&0\\ 0&0&-13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\frac{3}{4}&\frac{3}{2}\\ 0&1&\frac{22}{17}\\ 0&0&1\end{pmatrix}$$

(Recuerden que cuando una matriz diagonal $D=\begin{pmatrix}a_1&&0\\ &\ddots&\\ 0&&a_n\end{pmatrix}$ *multiplica a otra matriz M por la izquierda, resulta la matriz M con su fila i multiplicada por* a_i *)*

Con ello, obtenemos la descomposición LDU de A.

$$A=LDU=\begin{pmatrix}1&0&0\\ \frac{1}{4}&1&0\\ \frac{1}{2}&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&0&0\\ 0&\frac{17}{4}&0\\ 0&0&-13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\frac{3}{4}&\frac{3}{2}\\ 0&1&\frac{22}{17}\\ 0&0&1\end{pmatrix}\ \blacksquare$$

(**) En esta descomposición me refería más arriba de dejar sólo unos en la diagonal de L y U.

***Tarea:** Demuestre, como sale en su apunte, que la descomposición LDU, en las condiciones mencionadas, es única.*

Hint1: Suponga

$A=L_1D_1U_1=L_2D_2U_2$ *defina* $B=L_2^{-1}L_1D_1=D_2U_2U_1^{-1}$. *¿Cómo es B ?¿T. superior?, ¿T inferior? Concluya la forma de B.*

Hint 2: Si A es t inferior(o superior) , y sólo tienes unos en su diagonal.

- *(i) ¿Es invertible?*
- *(ii) ¿Qué tiene* A^{-1} *en su diagonal? (use la definición del producto matricial y que* A^{-1} *también es t. inferior(o superior))*